



UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Appunti di Fisica Nucleare e SubNucleare II

Guido Cioni, Tommaso Cavallucci

ATTENZIONE : *I seguenti appunti rappresentano un tentativo di raccolta e rielaborazione delle lezioni e delle esercitazioni del corso di Fisica Nucleare e SubNucleare per l'anno accademico 2010/2011. Gli appunti sono stati riguardati solo dall'esercitatore, che non ha potuto però correggerli nella loro interezza. Si raccomanda quindi un uso cosciente del volume , considerando che viene distribuito come raccolta di appunti e che , quindi, non si può garantire la correttezza in tutte le sue parti. Il professore ci tiene inoltre a precisare che gli appunti delle lezioni possono fungere solo come parte integrante dello studio ; si rimanda quindi ai libri di testo contenuti nella bibliografia per uno studio più approfondito.*

Versione del 7 settembre 2011

Indice

1	Interazioni Nucleari	7
1.1	Interazioni di scambio	7
1.2	Teoria di <i>Yukawa</i>	9
1.3	Campo Pionico	10
2	Fisica dei Pioni	13
2.1	Proprietá generali	13
2.2	Risonanze	15
2.2.1	Risonanze Δ	15
2.2.2	Fotoproduzione dei pioni	17
2.2.3	Risonanze ρ	18
2.2.4	Risonanze η e ω	18
2.2.5	Interazioni mediante scambio di mesoni	19
2.3	Mesoni e Barioni Strani	20
2.3.1	Kaoni	20
2.3.2	Barione Λ	21
2.3.3	Barione Σ	22
2.3.4	Barione Ξ	22
2.3.5	Barione Ω^-	23
2.3.6	Ottetti e decupletti Barionici	23
2.4	Ipernuclei	24
3	Classificazione delle particelle	27
3.1	Proprietá generali	27
3.1.1	Paritá	27
3.1.2	Numero barionico	27
3.1.3	Numero Leptonico	28
3.1.4	Isospin	28
3.2	Modello a quark degli adroni	29
3.3	Massa dei quark	30
3.4	Colore dei quark	31
3.4.1	Interazioni tra Quark	32
3.4.2	Prove dell'esistenza dei quark e del loro colore	32
4	Decadimenti α	35
4.1	Modello di Gamow-Gurney-Condon	37
4.2	Processi favoriti	40

4.3	Struttura fine degli spettri α	41
4.3.1	Momento angolare e parità	41
5	Fusione Nucleare	43
5.0.2	Temperatura	44
5.1	Sezione d'urto	45
5.2	Reaction Rate	45
5.2.1	Proprietà del picco di Gamow	48
5.3	Risonanze della fusione	49
5.4	Nascita degli elementi	49
5.5	Catena pp - Processi di fusione protone/protone	50
5.6	Ciclo CNO	53
5.7	Modello Solare Standard	54
5.8	Neutrini	55
5.8.1	Rivelazione dei neutrini	56
5.9	Fasi finali dell'evoluzione stellare (cenni)	58
5.9.1	Fusione dell'elio	59
5.9.2	Fusione del Carbonio e Ossigeno	59
5.10	Gas di Fermi	60
5.11	Classificazione delle stelle	62
5.12	Equazione di stato per core stellare	62
5.12.1	Limite per gas non relativistico sulla densità	63
5.12.2	Condizione di gas ideale	63
5.12.3	Correzioni elettrostatiche all'equazione di stato per un gas di fermi perfetto	64
5.12.4	Equazioni Politropiche e di Lane-Emden	65
5.13	Raggio stellare	66
5.14	Massa stellare	66
6	Decadimento β	69
6.1	Q -rate	69
6.2	Teoria di Fermi del decadimento β	70
6.2.1	Spettro energetico degli elettroni	72
6.2.2	Vita media	75
6.2.3	Limite per massa nulla del neutrino	76
6.3	Regole di selezione	77
7	Modello vibrazionale del nucleo	79
7.1	Introduzione	79
7.2	Oscillazioni Nucleari	80
7.3	Modello dinamico	82
7.4	Spettro Vibrazionale e Spettro rotazionale	85
8	Fissione Nucleare	87
8.1	Reazioni favorite	88
8.2	Deformazioni del nucleo	90
8.3	Distribuzione dei frammenti di fissione	93
8.4	Neutroni della fissione	95
8.5	Sezione d'urto per fissione indotta	96

8.6	Energia della fissione	98
8.7	Rallentamento dei neutroni	99
8.8	Distribuzione di probabilità per l'energia dei neutroni scatterati	100
8.9	Moderatore ideale	101
8.10	Reattori Autofertilizzanti	104
8.11	Struttura di un reattore	104
8.12	Smaltimento delle scorie	105
A	Particelle e loro proprietà	107
A.1	Quark	107
A.1.1	Classificazioni	107
A.1.2	Struttura a quark degli adroni	107
A.2	Mesoni	108
A.2.1	Reazioni di produzione e decadimento	108
A.2.2	Proprietà fisiche	108
A.3	Barioni	108
A.3.1	Reazioni di produzione e decadimento	108
A.3.2	Proprietà fisiche	109
A.4	Leptoni	109
B	Relazioni Fondamentali	111
B.1	Meccanica Quantistica	111
C	Equazioni di Lane Emden	121

Capitolo 1

Interazioni Nucleari

1.1 Interazioni di scambio

Abbiamo già visto che il potenziale di interazione tra due nucleoni si può scrivere come

$$V_{NN} = V_1(r) + V_2(r)\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 + V_3(r)S_{12} \quad (1.1)$$

dove

$$S_{12} = \frac{3(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{r})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{r})}{r^2} - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \quad (1.2)$$

Tale potenziale deve essere corretto con termini che tengano conto dei possibili scambi di particelle nei processi di scattering. Si vogliono quindi descrivere tutti i possibili scambi in modo da quantificare il termine correttivo della (1.1). Vediamo innanzitutto quali sono le possibili operazioni di scambio. Supponiamo quindi di prendere la funzione $\psi(\vec{r}_1, \sigma_1, \vec{r}_2, \sigma_2)$ che rappresenta la funzione d'onda del sistema di due particelle. Definiamo l'operatore \hat{P}_r che agisce come $\hat{P}_r\psi(\vec{r}_1, \sigma_1, \vec{r}_2, \sigma_2) = \psi(\vec{r}_2, \sigma_1, \vec{r}_1, \sigma_2)$: tale operatore é detto di *Majorana*. Analogamente si introduce un operatore di scambio \hat{P}_σ che agisce come $\hat{P}_\sigma\psi = \psi(\vec{r}_1, \sigma_2, \vec{r}_2, \sigma_1)$: tale operatore é detto di *Bartlett*. Infine si introduce un'operatore , detto di *Heisenberg* , $\hat{P}_{r\sigma}$ che agisce come $\hat{P}_{r\sigma}\psi = \psi(\vec{r}_2, \sigma_2, \vec{r}_1, \sigma_1)$. Ovviamente vale

$$\hat{P}_{r\sigma} = \hat{P}_r\hat{P}_\sigma \quad ; \quad \hat{P}_{r\sigma}^2 = \hat{P}_r^2 = \hat{P}_\sigma^2 = \mathbb{I}$$

quindi gli autovalori di questi operatori sono ± 1 . L'autovalore dell'operatore \hat{P}_r si può scrivere in termini del moto relativo , infatti $P_r = (-1)^\ell$. La stessa cosa si può fare per l'operatore \hat{P}_σ , visto che nei casi di singoletto ($S = 0$) , tripletto ($S = 1$) la funzione d'onda risulta rispettivamente antisimmetrica e simmetrica. Dunque $P_\sigma = (-1)^{S+1}$. Combinando queste due relazioni si ricavano anche gli autovalori dell'operatore di Heisenberg : $P_{r\sigma} = (-1)^{\ell+S+1}$. Analogamente si introducono 3 tipi di forze nucleari di scambio.

- $V_M(r)\hat{P}_r \longrightarrow$ forze di Majorana
- $V_B(R)\hat{P}_\sigma \longrightarrow$ forze di Bartlett
- $V_H(r)\hat{P}_{r\sigma} \longrightarrow$ forze di Heisenberg

A partire da queste forze, di tipo centrale ,si possono costruire anche delle forze di tipo tensoriale. Queste si ottengono dalle prime , moltiplicando per l'operatore tensore definito dalla (1.2). Si vede però che esistono forze tensoriali solo di tipo Majorana, visto che le altre

si possono ricondurre a questa. Infatti proviamo ad applicare l'operatore tensoriale di spin alle forze di Bartlett. Visto che l'operatore della (1.2) si può riscrivere come

$$S_{12} = \frac{2}{\hbar^2} \left[\frac{(\vec{S} \cdot \vec{r})^2}{r^2} - \vec{S}^2 \right] \quad (1.3)$$

allora

$$S_{12}P_\sigma = \begin{cases} 0 & \text{se } S = 0 \\ S_{12} & \text{se } S = 1 \end{cases} \quad (1.4)$$

Analogamente

$$S_{12}P_rP_\sigma = \begin{cases} 0 & \text{se } S = 0 \\ S_{12}P_r & \text{se } S = 1 \end{cases} \quad (1.5)$$

Quindi un eventuale forza tensoriale di scambio di tipo Heisenberg, così come una di tipo Bartlett, si riduce alla forza di tipo Majorana. Dunque l'unico tipo di forza tensoriale può essere solo quella di tipo Majorana ed è data da $V_{\text{TM}}(r)S_{12}\hat{P}_r$. In particolare, se si considera un sistema di due nucleoni si può anche considerare anche l'operatore di *isospin* per il quale viene definito, analogamente a quanto fatto prima, un operatore di scambio di isospin per cui $\hat{P}_\tau \psi(\vec{r}_1, \sigma_1, \tau_1, \vec{r}_2, \sigma_2, \tau_2) = \psi(\vec{r}_1, \sigma_1, \tau_2, \vec{r}_2, \sigma_2, \tau_1)$. Ovviamente anche per questo operatore valgono le relazioni

$$\hat{P}_\tau^2 = \mathbb{I} \implies P_\tau = \pm 1$$

Dunque l'operatore composto da tutti gli scambi equivale ad $\hat{P}_{12} = \hat{P}_r\hat{P}_\sigma\hat{P}_\tau = -\mathbb{I}$: questa è la forma del principio di esclusione di Pauli. Abbiamo quindi costruito 6 tipi di forze

Tipi	centrali	tensoriali
Forze Ordinarie	$V_W(r)$	$V_{\text{TW}}(r)S_{12}$
Forze di scambio	$V_M(r)\hat{P}_r, V_B(r)\hat{P}_\sigma, V_H(r)\hat{P}_{r\sigma}$	$V_{\text{TM}}(r)S_{12}P_r$

Tutte queste forze compongono il potenziale $V_6(r)$ che costituisce la correzione al potenziale nucleare di interazione nucleone-nucleone. Vogliamo ora scrivere questo potenziale esplicitando la dipendenza dagli operatori σ . Si utilizzano relazioni del tipo¹

$$P_\sigma = \frac{1}{2}(1 + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \quad (1.7)$$

Poiché gli operatori hanno forme simili si può utilizzare anche una relazione del tipo

$$P_\tau = \frac{1}{2}(1 + \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) \implies P_\tau = (-1)^{\tau+1} \quad (1.8)$$

Utilizzando queste relazioni l'equazione di consistenza che definisce il principio di esclusione di Pauli si può riscrivere come

$$P_rP_\sigma P_\tau = -1 \implies (-1)^{\ell+S+1+\tau+1} = (-1)^{\ell+S+\tau} = -1 \quad (1.9)$$

¹La derivazione di queste relazioni è semplice: basta osservare che

$$\langle \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \rangle = \begin{cases} +1 & \text{se } S = 1 \\ -3 & \text{se } S = 0 \end{cases} \implies P_\sigma = (-1)^{S+1} \quad (1.6)$$

Piú formalmente si dovrebbe applicare l'operatore P_σ agli stati di singoletto e tripletto.

ovvero $\ell + S + \tau$ deve essere una combinazione dispari. Visto che l'operatore di Heisenberg equivale all'operatore di scambio di isospin, a meno di un segno, possiamo scrivere

$$P_{r\sigma} = -\frac{1}{2}(1 + \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) \quad (1.10)$$

Utilizzando inoltre la relazione $\hat{P}_r = -\hat{P}_\sigma \hat{P}_\tau$ si ricava infine

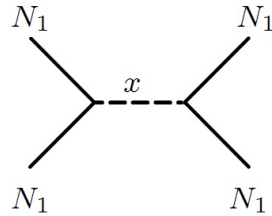
$$P_r = -\frac{1}{4}(1 + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)(1 + \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) \quad (1.11)$$

Sostituendo questi risultati nel potenziale si ottiene finalmente

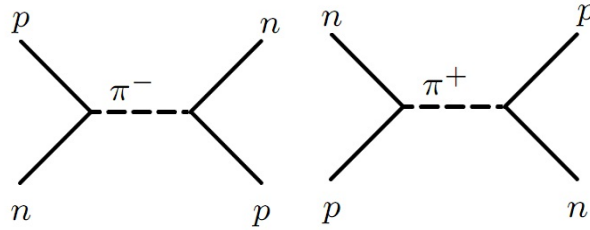
$$V_6 = V_c(r) + V_\sigma(r)\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 + V_\tau(r)\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 + V_{\tau\sigma}(r)(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)(\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) + V_T(r)S_{12} + V_{T\tau}(r)S_{12}(\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) \quad (1.12)$$

1.2 Teoria di Yukawa

Secondo la teoria di Yukawa l'interazione tra due cariche mediata da particelle, dette *pioni*. Graficamente, per l'interazione tra due nucleoni N_1 ed N_2 , si utilizza la seguente notazione



Alcuni esempi di interazioni mediate da pioni sono riportate in figura.



Il primo quesito che Yukawa si pose fu quello di determinare la massa di questa particella mediatrice: in questo caso la massa è evidentemente diversa da 0, a differenza di quanto succedeva con il fotone nell'interazione elettromagnetica. Questa particella non viene rivelata direttamente nel processo quindi deve essere ricavata con considerazioni generali. Quando il nucleone 1 emette la particella di mediazione x si sta violando la conservazione dell'energia, dunque questa particella può esistere solo per un tempo di coerenza che si può stimare utilizzando l'indeterminazione $\Delta E \Delta t \sim \hbar$. Infatti, poiché $\Delta E = m_x c^2 \implies \Delta t \sim \hbar / m_x c^2$. La distanza che questa particella può percorrere si può stimare come

$$c\Delta t \sim \frac{\hbar c}{m_x c^2} = \frac{\hbar}{m_x c} = R_{int}$$

Questo valore rappresenta l'ordine di grandezza del raggio di interazione ed è pari alla lunghezza d'onda Compton. Supponendo $R_{int} \sim 1,5 \text{ fm}$ (\sim raggio dell'interazione nucleare) si può stimare

$$m_x c^2 = \frac{\hbar c}{R_{int}} = \frac{200 \text{ MeV fm}}{1,5 \text{ fm}} \simeq 130 \text{ MeV}$$

1.3 Campo Pionico

Vediamo come é possibile ricavare l'equazione che definisce implicitamente il campo pionico. Convienne prima stabilire un'analogia con il caso elettromagnetico. Il campo prodotto da una carica puntiforme si può scrivere risolvendo l'equazione di Poisson per una distribuzione di carica $\rho(\vec{r}) = e\delta^3(\vec{r})$. L'equazione da risolvere é

$$\nabla^2\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}e\delta^3(\vec{r}) \implies \phi(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (1.13)$$

Ovvero

$$V(r) = e\phi = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (1.14)$$

Per trovare l'equazione analoga per il campo pionico consideriamo l'energia relativistica $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ e sostituiamo E e p con i relativi operatori quantistici². Si ottiene l'equazione di Klein-Gordon

$$\left(\nabla^2 - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi \quad (1.16)$$

dove ϕ stavolta identifica il campo pionico. Si noti che ponendo $m = 0$ si trova l'equazione di D'Alembert per le onde. Se invece consideriamo il caso stazionario $\partial_t\phi = 0$ e l'equazione si riduce a $\nabla^2\phi - k^2\phi = 0$, dove $k = m_xc/\hbar$: tutto questo vale nel caso di assenza di sorgenti. La sorgente del campo pionico é costituita dal nucleone: se supponiamo di posizionarlo nel punto $\vec{r}_0 = 0$ l'equazione diventa

$$\nabla^2\phi - k^2\phi = -g\delta^3(\vec{r}). \quad (1.17)$$

La costante g é l'analogo della carica nel caso pionico. La soluzione dell'equazione é data dal potenziale di Yukawa

$$\phi = \frac{g}{4\pi} \frac{e^{-kr}}{r} \implies V_{NN} = g\phi \quad (1.18)$$

Un'ulteriore generalizzazione della (1.18) é data da

$$\phi_\pi(\vec{r}) = \frac{g}{4\pi} \frac{e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}_1|}{\lambda_c}}}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} \quad (1.19)$$

dove $\lambda_c = \hbar/m_\pi c$ é la lunghezza d'onda *Compton* e la sorgente del campo é data da $g\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_1)$. Si vede che il campo scritto prima é invariante per parit  nonostante il pione abbia parit  intrinseca negativa. Bisogna quindi modificare il termine di sorgente con $g(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\nabla}_1)\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_1)$. Sostituendo nell'equazione (1.17) si ottiene

$$\left[\nabla^2 - \frac{m_\pi^2c^2}{\hbar^2}\right]\phi_\pi(\vec{r}) = -g(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\nabla}_1)\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_1) \quad (1.20)$$

Questa equazione ammette la soluzione

$$\phi_\pi(\vec{r}) = \frac{g}{4\pi} (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\nabla}_1) \frac{e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}_1|}{\lambda_c}}}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} \quad (1.21)$$

$$\begin{cases} \hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \\ \hat{p} = -i\hbar \nabla \end{cases} \quad (1.15)$$

Visto che $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\nabla}_1)$ é uno pseudoscalare³ allora ϕ_π cambia segno sotto parit  , come volevasi ottenere. Il potenziale nucleare si pu  quindi scrivere come

$$V_{\text{NN}} = V_{\text{OPE}}(r) = \frac{g^2}{4\pi} (\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{\nabla}_2) (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\nabla}_1) \frac{e^{-\frac{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}{\lambda_c}}}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \quad (1.22)$$

Da questa si ottiene immediatamente⁴

$$V_{\text{NN}} = -\frac{g^2}{4\pi} \frac{1}{3} \left[\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 + \left(1 + 3\frac{\lambda_c}{r} + 3\frac{\lambda_c^2}{r^2} \right) S_{12} \right] \frac{e^{-r/\lambda_c}}{r} \quad (1.23)$$

ove S_{12} é l'operatore tensoriale definito dalla (1.2) e la sigla OPE sta per *One Pion Exchange*.

³Cambia segno per inversione dei 3 assi

⁴Passando al centro di massa si definisce una nuova variabile $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ per la quale si definisce $\nabla_r \equiv \nabla$. Si ottiene quindi $\vec{\nabla}_1 = \vec{\nabla}$ e $\vec{\nabla}_2 = -\vec{\nabla}$, ovvero $(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{\nabla}_2)(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\nabla}_1) = -(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{\nabla})(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\nabla})$

Capitolo 2

Fisica dei Pioni

2.1 Proprietá generali

I pioni possono essere di diversi tipi : π^+, π^0, π^- . La massa di queste particelle é data rispettivamente da $m_{\pi^\pm} = 139,57 \text{ MeV}$ e $m_{\pi^0} = 134,97 \text{ MeV}$.

Decadimenti Questi non sono stabili ma decadono usualmente secondo i seguenti decadimenti

- $\pi^0 \longrightarrow \gamma + \gamma$, (98,8%)
- $\pi^0 \longrightarrow \gamma + e^+ + e^-$, ($\sim 1,2\%$)

Il tempo medio di decadimento é dato da $\tau = (8,4 \pm 0,6) \cdot 10^{-17} \text{ s}$. Gli altri tipi di pioni decadono secondo

- $\pi^- \longrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \longrightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$, ($\sim 100\%$), $\tau \simeq 2,8 \cdot 10^{-8} \text{ s}$
- $\pi^- \longrightarrow e^- + \nu_e$, molto raro
- $\pi^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu_\mu$

Massa La massa del pione si può ricavare studiando questo decadimento del centro di massa. Vale infatti il bilancio

$$m_\pi c^2 = E_\mu + p_\nu c \quad (2.1)$$

Spin Si voglia misurare lo spin del pione. Dal primo decadimento illustrato, $\pi^0 \longrightarrow \gamma + \gamma$, si deduce che lo spin deve essere intero. Si può inoltre utilizzare il processo di scattering seguente

$$p + p \longrightarrow p + n + \pi^+ \equiv d + \pi^+$$

ove d indica il deutone. Studiando anche il processo inverso e confrontando le due sezioni d'urto possiamo avere informazione sullo spin del pione. Si noti che la conseguenza dell'invarianza temporale per processi generici $a + A \longrightarrow b + B$ e $b + B \longrightarrow a + A$ impone che le sezioni d'urto siano le stesse a meno di cambiamenti di spin. Tale proprietà é detta del bilancio dettagliato e nel seguito si dará una breve spiegazione del risultato ottenuto in (2.5), alla quale si rimanda immediatamente nel caso si voglia seguire una trattazione meno rigorosa.

Si consideri un processo generico $a + A \rightarrow b + B$: il numero di transizioni per unitá di tempo é dato dalla regola d'oro di Fermi

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \psi_{Bb} | \hat{H} | \psi_{Aa} \rangle|^2 \rho(E) \quad (2.2)$$

dove $\rho(E) = \frac{dn(E)}{dE}$ é la densità di stati finali del sistema i unità di energia. Per una particella libera in un volume V si ha

$$dn = (2s_B + 1)(2s_b + 1) \frac{4\pi V p_b^2 dp_b}{h^3}$$

Visto che $dE = v_b dp_b$ si ha

$$\frac{dn}{dE} = (2s_B + 1)(2s_b + 1) \frac{4\pi V p_b^2}{h^3 v_b}$$

Sostituendo nella (2.2) si ottiene

$$w = \frac{V}{\pi \hbar^4} \frac{p_b^2}{v_b} (2s_B + 1)(2s_b + 1) |\langle \psi_{Bb} | \hat{H} | \psi_{Aa} \rangle|^2$$

La sezione d'urto é definita come il rapporto

$$\frac{n.transizioni}{n.nuclei A \cdot tempo} = N_a v_a \sigma(a + A \rightarrow b + B) = \frac{w}{n.nuclei A}$$

Supponendo che ci sia un solo nucleo di A nel volume V si ottiene

$$\sigma(a + A \rightarrow b + B) = \frac{Vw}{v_a} = \frac{V^2}{\pi \hbar^4} \frac{p_b^2}{v_a v_b} (2s_B + 1)(2s_b + 1) |\langle \psi_{Bb} | \hat{H} | \psi_{Aa} \rangle|^2 \quad (2.3)$$

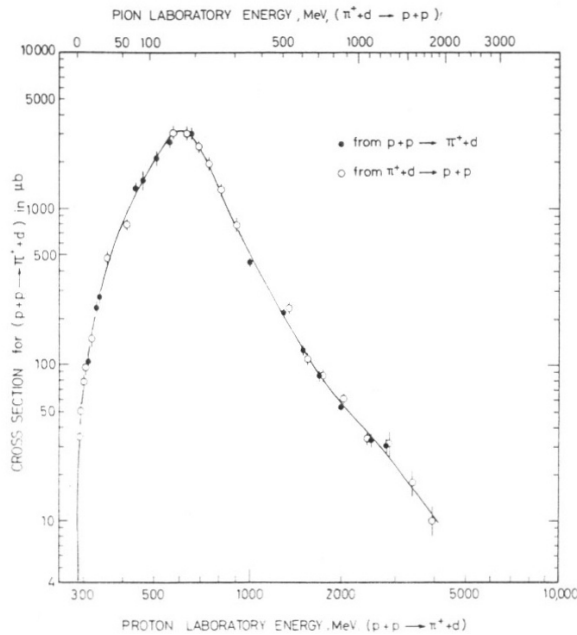
Nel calcolare il rapporto tra le sezioni d'urto delle reazioni diretta e inversa conviene ricordare che H deve essere Hermitiano, quindi $|\langle \psi_{Bb} | \hat{H} | \psi_{Aa} \rangle|^2 = |\langle \psi_{Aa} | \hat{H} | \psi_{Bb} \rangle|^2$. Si ricava quindi

$$\frac{\sigma(a + A \rightarrow b + B)}{\sigma(b + B \rightarrow a + A)} = \frac{k_b^2 (2s_B + 1)(2s_b + 1)}{k_a^2 (2s_A + 1)(2s_a + 1)} \quad (2.4)$$

Nel caso particolare del decadimento pp si ha

$$\frac{\sigma(p + p \rightarrow \pi^+ + d)}{\sigma(\pi^+ + d \rightarrow p + p)} = \frac{k_\pi^2 (2s_\pi + 1)(2s_d + 1)}{k_p^2 (2s_p + 1)^2 / 2} = \frac{k_\pi^2 (2s_\pi + 1) 3}{k_p^2 2} \quad (2.5)$$

Il 2 al denominatore tiene conto del doppio conteggio effettuato, inoltre l'ultimo risultato é stato ottenuto sostituendo $s_d = 1$ e $s_p = 1/2$. Sperimentalmente si osserva quindi che l'identit  é vera quando $s_\pi = 0$.



Parit  La parit  intrinseca del pione si ricava invece considerando il decadimento

$$\pi^- + d \longrightarrow n + n$$

Visto che l'interazione   forte e a corto *range* si pu  considerare solo il contributo con $\ell = 0$: per ricavare la parit  basta quindi applicare la conservazione $\Pi_i = \Pi_f$. In particolare visto che

$$\Pi_i = \Pi_\pi \Pi_d (-1)^{\ell_i} = \Pi_\pi$$

e che

$$\Pi_f = \Pi_n \Pi_n (-1)^{\ell_f} = (-1)^{\ell_f}$$

si ottiene che $\Pi_\pi = (-1)^{\ell_f}$. Basta quindi ricavare ℓ_f utilizzando la conservazione del momento angolare. Poich  $\vec{J}_i = \vec{J}_f$ si ottiene

$$\vec{J}_i = \vec{s}_\pi + \vec{s}_d + \vec{\ell}_i = 1 = \vec{J}_f = \vec{s}_n + \vec{s}_n + \vec{\ell}_f = \vec{S} + \vec{\ell}_f \quad (2.6)$$

La funzione d'onda totale dello stato finale $\psi = \varphi\chi$ deve essere antisimmetrica per la statistica di Fermi-Dirac : gli unici stati possibili permessi da questa statistica sono

1. $S = 0$, $\ell = 0, 2, 4 \dots$
2. $S = 1$, $\ell = 1, 3, 5 \dots$

L'unica combinazione compatibile con \vec{J}_f   data da $S = 1$, $\ell_f = 1$, quindi $\Pi_f = -1 = \Pi_\pi$.

Produzione I pioni possono essere generati da scattering di nucleoni

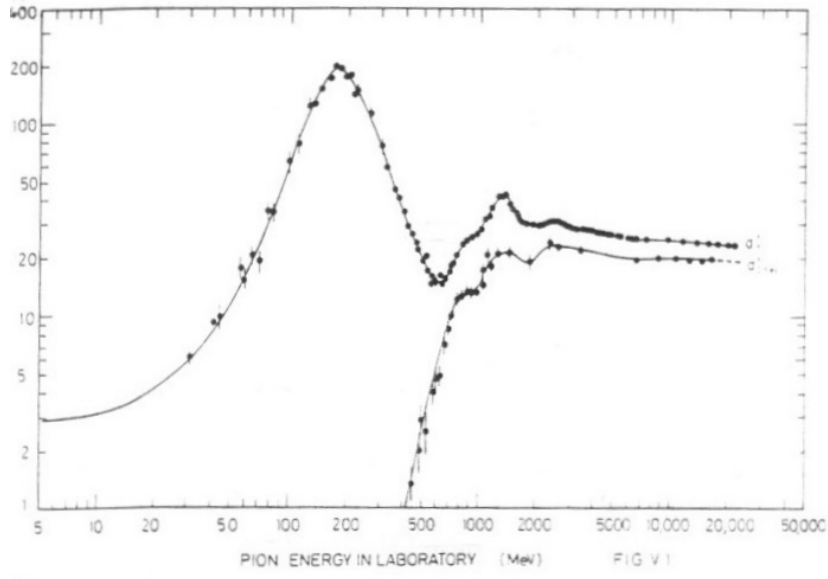
- 1 pione** • $p + p \longrightarrow p + p + \pi^0$
 • $p + p \longrightarrow p + n + \pi^+$
 • $p + n \longrightarrow p + n + \pi^0$
 • $p + n \longrightarrow p + p + \pi^-$
- 2 pioni** • $p + p \longrightarrow p + p + \pi^0 + \pi^0$
 • $p + p \longrightarrow p + p + \pi^+ + \pi^-$
 • $p + p \longrightarrow p + n + \pi^+ + \pi^0$
 • $p + p \longrightarrow n + n + \pi^+ + \pi^+$

Aumentando l'energia dei fasci si possono produrre anche pi  pioni. Vale la conservazione del numero barionico , per la quale il numero dei nucleoni si conserva.

2.2 Risonanze

2.2.1 Risonanze Δ

Lo studio sperimentale dei processi di scattering pione-nucleone riserva alcune peculiarit  fondamentali. La prima particolarit  sussiste nell'andamento della sezione d'urto in funzione dell'energia del processo elastico (calcolata nel sistema del laboratorio) $\pi^+ + p \longrightarrow \pi^+ + p$: si nota infatti che vi sono dei picchi di *risonanza* che possono essere interpretati come stati eccitati metastabili.



Il grafico della sezione d'urto in funzione dell'energia può essere infatti fittato con una Lorentziana ,

$$L(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\frac{\Gamma}{2}}{(x - x_0)^2 + (\frac{\Gamma}{2})^2} \quad (2.7)$$

dove Γ rappresenta la larghezza a metà altezza. Come già detto l'aumento di σ intorno a ~ 200 MeV può essere interpretato come la formazione di uno stato intermedio che decadrà poco dopo, ovvero

$$\pi^+ + p \longrightarrow \Delta^{++} \longrightarrow \pi^+ + p$$

Dunque il pione ed il protone formano, interagendo , uno stato legato non stazionario molto instabile. Visto che Γ ha le dimensioni di una lunghezza si può stimare il tempo medio di vita utilizzando il principio di indeterminazione

$$\Gamma \tau_{\Delta} \sim \hbar \implies \tau_{\Delta} \sim \frac{\hbar c}{\Gamma c} \simeq \frac{200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{115 \text{ MeV} \cdot 3 \cdot 10^{23} \text{ fm/s}} \simeq 0,6 \cdot 10^{-23} \text{ s} \quad (2.8)$$

Cambiando le particelle dello scattering si ottengono gli altri tipi di particelle $\Delta^+, \Delta^0, \Delta^-$. Ad esempio con il processo di scattering $\pi^- + p \longrightarrow p + \pi^-$ l'andamento della sezione d'urto è lo stesso ma stavolta la particella associata allo stato metastabile è data da Δ^0 . Le particelle $\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0, \Delta^-$ rappresentano i 4 tipi di risonanza possibili , tutti alla stessa energia. Da questo si ricava che la particella Δ ha isospin $T = 3/2$ e di conseguenza può trovarsi nei diversi stati di proiezione degli isospin $T_3 = 3/2, 1/2, -1/2, -3/2$ relativi rispettivamente alle particelle $\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0, \Delta^-$. Per queste particelle $J^{\Pi} = (3/2)^+$. Le risonanze di tipo N^* invece avvengono ad energie molto più alte , intorno ai 1440 MeV, 1520 MeV : per queste $J^{\Pi} = (1/2)^+$ e $T = 1/2$. Queste risonanze vengono indicate con l'asterisco perché fisicamente si possono interpretare come l'assorbimento di un pione da parte del nucleone che diventa quindi eccitato. Introduciamo ora il concetto di massa invariante , per la risonanza Δ . Si consideri quindi il processo $\pi^+ + p \longrightarrow \Delta^{++}$. Il quadrimpulso relativo alla particelle Δ ha componenti

$$p_{\Delta}^{\mu} = \left(\frac{E_{\Delta}}{c}, \vec{p}_{\Delta} \right)$$

La massa a riposo si calcola come

$$p_\Delta^\mu \cdot p_\Delta^\mu = E_\Delta^2/c^2 - p_\Delta^2 = \frac{p_\Delta^2 c^2}{c^2} + \frac{(m_\Delta c^2)^2}{c^2} - p_\Delta^2 = (m_\Delta c)^2$$

Consideriamo ora $p_\Delta^\mu = p_\pi^\mu + p_p^\mu$, ovvero $E_\Delta = E_\pi + E_p$, $\vec{p}_\Delta = \vec{p}_\pi + \vec{p}_p$. In questo caso la massa a riposo é data da

$$\frac{(E_p + E_\pi)^2}{c^2} - (\vec{p}_p + \vec{p}_\pi)^2 = m_\Delta^2 c^2$$

ovvero $m_\Delta = M(\pi^+ p)$ é la massa invariante. Questa espressione vale in ogni sistema di riferimento, dunque in particolare anche in quello del laboratorio. In quest'ultimo sistema si ha $E_p = m_p c^2$ e $\vec{p}_p = 0$ dunque

$$(m_p c^2 + E_\pi)^2 - p_\pi^2 c^2 = m_\Delta^2 c^4 \quad (2.9)$$

L'energia E_π é calcolabile con un semplice bilancio energetico

$$E_\pi^2 = (p_\pi c)^2 + (m_\pi c^2)^2 \implies E_\pi = T_\pi + m_\pi c^2 \quad (2.10)$$

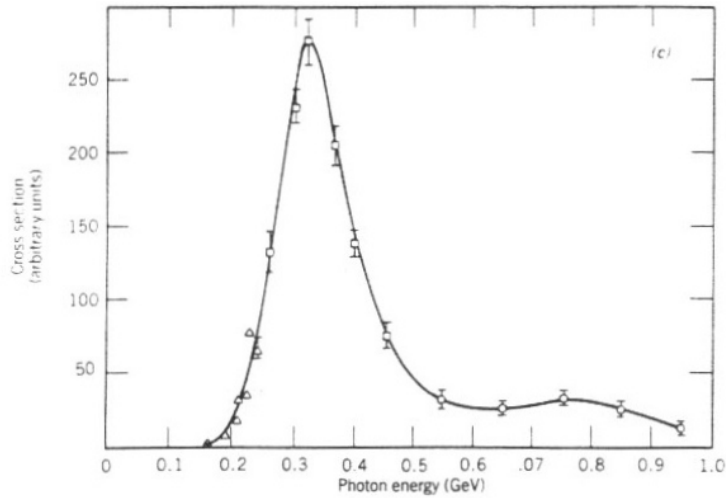
Visto che $T_\pi \sim 200$ MeV si ottiene $m_\Delta c^2 \simeq 1232$ MeV.

2.2.2 Fotoproduzione dei pioni

La reazione di fotoproduzione dei pioni é data da

$$\gamma + p \rightarrow p + \pi^0 \quad (2.11)$$

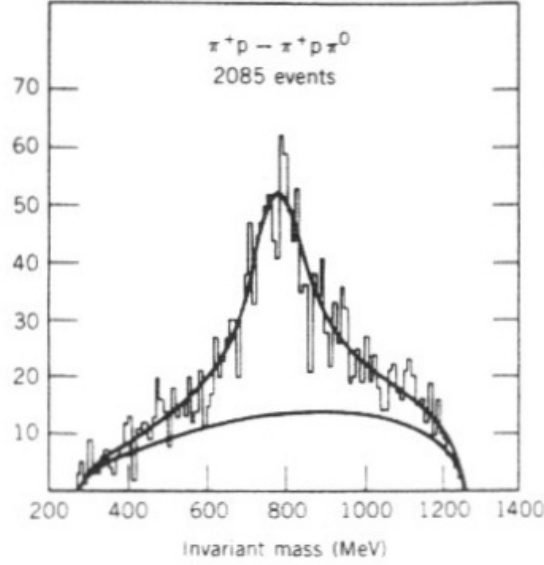
La sezione d'urto del processo nel sistema del laboratorio ha l'andamento dato dalla figura



Si noti che la risonanza é presente intorno ai 340 MeV. Facendo questo tipo di scattering si possono ottenere risonanze mesoniche che verranno descritte nel seguito.

2.2.3 Risonanze ρ

La risonanza di tipo ρ si incontra in processi del tipo $\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + \pi^0 + p$: in questo caso lo stato metastabile é dato dalla presenza della particella ρ^+ quindi la reazione puó essere riscritta come $\pi^+ + p \rightarrow \rho^+ + p \rightarrow \pi^+ + \pi^0 + p$. Facendo un grafico della sezione d'urto in funzione della massa invariante $M(\pi^+\pi^0)$ si nota che é presente un picco, dovuto alla risonanza , intorno a 770 MeV.



Analogamente a quanto visto per la Δ esistono 3 diversi tipi di particelle ρ , dati da ρ^+, ρ^0, ρ^- . Fittando con una Lorenziana si ottengono i valori $\Gamma = 150$ MeV e la massa di risonanza $m_\rho = 770$ MeV. A titolo di esempio si riporta anche la reazione che porta alla formazione della particella ρ^0

$$\gamma + p \rightarrow \rho^0 + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + p \quad (2.12)$$

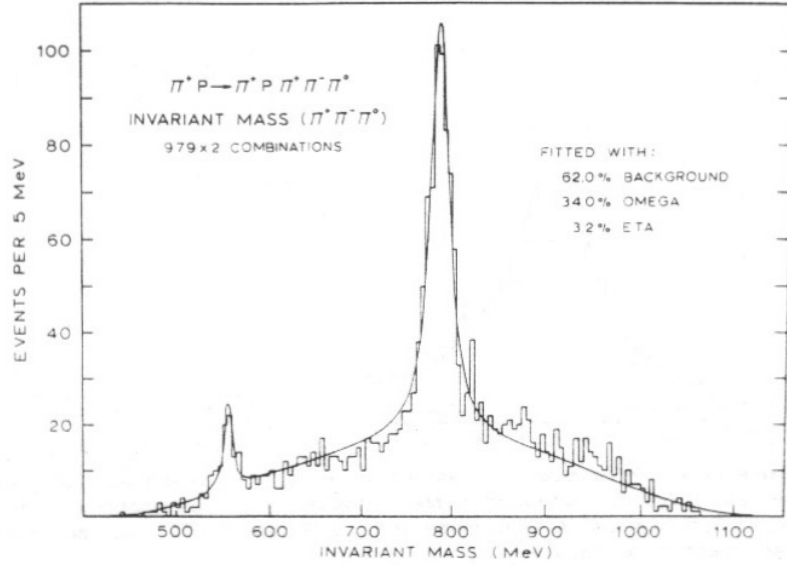
Visto che questa particella esiste in 3 diversi stati di carica , si puó pensare come tripletto di isospin, quindi $T = 1$ e $T_3 = -1, 0, 1$. Inoltre si nota che $J^\Pi = 1^-$. Si noti che , rispetto al pione, la particella ρ ha $J \neq 0$ e massa diversa.

2.2.4 Risonanze η e ω

Si ottengono in processi del tipo

$$\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p + \pi^+ + \pi^- + \pi^0 \quad (2.13)$$

In questo caso l'energia é sufficientemente alta per la formazione di 3 pioni. Se si considera la massa invariante per il sistema $M(\pi^+\pi^-\pi^0)$ e si grafica la sezione d'urto in funzione di questa si evidenziano due diversi picchi : il primo, corrispondente alle risonanze η , tra 500 e 600 MeV ; il secondo , corrispondente alle risonanze ω , in prossimitá di 800 MeV.



In particolare dal fit si ottengono i valori di $m_\eta = 549$ MeV e $\Gamma_\eta = 0,83$ KeV ; $J^\Pi = 0^-$. Si osserva che Γ_η è molto piccola rispetto al caso della particella Δ , quindi la vita media in quest'ultimo caso è molto più alta : $\tau_\eta \sim 10^{-18}$ s. La risonanza decade quindi in modo elettromagnetico. Per le risonanze ω il fit restituisce $m_\omega = 783$ MeV e $\Gamma_\omega = 9,9$ MeV mentre $J^\Pi = 1^-$. Le risonanze η si possono ottenere anche in processi del tipo

$$p + \bar{p} \rightarrow \pi^0 + 2\pi^+ + 2\pi^- \quad (2.14)$$

In questo caso il grafico della massa invariante del sistema, $M(\pi^+\pi^-\pi^0)$ contiene due picchi , analogamente al caso iniziale (2.13). Viene spontaneo chiedersi se si possa scegliere qualsiasi combinazione di pioni per ottenere le stesse risonanze : in realtà l'unica combinazione che presenta risonanza è quella analizzata con $M(\pi^+\pi^-\pi^0)$; altre combinazioni , come $M(\pi^+\pi^+\pi^0)$ non danno luogo ad alcuna risonanza. Se ne conclude che ,per questo tipo di risonanze, esiste solo lo stato con carica nulla , dato dalla combinazione $\pi^+\pi^-\pi^0$, dunque lo stato sarà sempre un singoletto di isospin, ovvero $T = 0$. Le proprietà viste si possono ricapitolare in una tabella.

	J^Π	T	T_3	m
π	0^-	1	π^+, π^0, π^-	140
η	0^-	0	η	550
ρ	1^-	1	ρ^+, ρ^0, ρ^-	770
ω	1^-	0	ω	783

2.2.5 Interazioni mediante scambio di mesoni

Per introdurre l'argomento successivo vogliamo ora discutere l'effetto di una risonanza nell'interazione nucleone-nucleone (v_{NN}).

OPE=One Pion Exchange È già stato analizzato il caso dell'interazione OPE. Un'interazione di questo tipo si può schematizzare con la figura seguente.

inserire figura

TPE=Two Pion Exchange Consideriamo quindi un processo di interazione tra due nucleoni N . Se il primo nucleone è eccitato allora al suo interno si ha un processo che libera

un pione : il pione può , a sua volta, eccitare il secondo nucleone che da luogo ad una particella Δ . Generalizzando si ha che i due nucleoni possono essere entrambi particelle Δ : in questo caso l'interazione é di tipo *TPE* , *Two Pion Exchange*.

inserire figura

ρ, ω **meson exchange** *inserire figura* In realtà i tipi di risonanze, ρ, ω e i diversi meccanismi *TPE* , *OPE* , non sono arbitrari ma dipendono dalla distanza relativa tra i due nucleoni : graficando infatti il potenziale v_{NN} in funzione della distanza relativa r si ha che , per distanze piccole si hanno più frequentemente risonanze di tipo ρ, ω mentre , al crescere di r , si incontrano rispettivamente *TPE* e *OPE*.

Interazioni tra 3 nucleoni Si può ampliare il ragionamento esposto prima anche ad un sistema di 3 nucleoni legati da i potenziali v_{12} , v_{23} : in alcuni casi il problema può essere ricondotto a due sottoproblemi di interazione a due corpi , mentre in altri casi la schematizzazione non é sufficiente. Per questi ultimi , quando si ha risonanza Δ nel nucleo , l'Hamiltoniana deve essere corretta , aggiungendo un termine di interazione che tiene conto dei 3 nucleoni. In questo caso si ha quindi

$$H = \sum \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} v_{ij} + \frac{1}{3!} \sum_{ijk} v_{ijk} \quad (2.15)$$

Correzioni di ordine superiore migliorano i risultati sperimentali¹. Le due situazioni elencate precedentemente sono raccolte in figura *inserire figura*

2.3 Mesoni e Barioni Strani

Lo studio degli urti pione-nucleone portó alla creazione di particelle con proprietà particolari che vennero considerate inizialmente *strane* , visto che non rispettavano le leggi scoperte fino a quel momento.

2.3.1 Kaoni

Il primo esempio di mesone strano é dato dal *Kaone*. Per questo esistono due stati di carica K^+, K^0 , con le masse $m_{K^+} = 493,7$ MeV e $m_{K^0} = 497,7$ MeV. La somiglianza delle due masse porta ad interpretare i due stati di carica come stati di isospin della stessa particella , quindi $T = 1/2$ e $T_3 = \pm 1/2$; $J^\Pi = 0^-$. I mesoni K si possono produrre con il processo

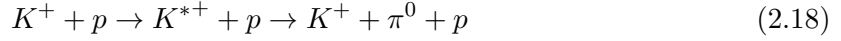
$$\pi^- + p \rightarrow n + K^+ + K^- \quad (2.16)$$

dove $K^- \equiv \bar{K}^+$. Misurando la sezione d'urto di questo processo si ottiene $\sigma \sim 10^{-3} \text{ barn}$: questo valore é caratteristico delle interazioni forti. Nonostante questo si osserva sperimentalmente che queste particelle riescono a sopravvivere per un tempo abbastanza lungo , $\tau_K = 1,2 \cdot 10^{-8}$ s , quindi il processo responsabile del decadimento é un'interazione debole : ecco la stranezza. Si riportano i processi di decadimento.

$$K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu, (63\%) \quad ; \quad K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0, (21\%) \quad (2.17)$$

¹Per ottenere un buon risultato si utilizzano correzioni fino al 18^{mo} ordine

La risonanza di energia piú bassa del Kaone é data dal $K^*(892)$, $T = 1/2$, $J^\Pi = 1^-$. Tale risonanza si forma con una reazione del tipo



Questa particella decade forte ed ha una vita media molto piccola.

2.3.2 Barione Λ

Un tipo di barione strano² é dato dalla particella Λ . Per questa $m_\Lambda = 1116$ MeV ; $J^\Pi = 1/2^+$: possiede un solo stato di carica , $T = 0$. La particella si puó formare attraverso il processo



Osservando la sezione d'urto di questo processo si osserva che l'interazione é forte ma la vita media é di $\tau \simeq 2,6 \cdot 10^{-10}$ s quindi decade attraverso un'interazione debole. I modi principali di decadimento sono dati da



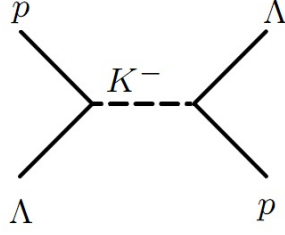
Decadimenti di tipo elettromagnetico per questo tipo di particella non sono mai stati osservati; similmente non é possibile ottenere un decadimento del tipo $\Lambda \rightarrow p + K^-$ visto che $Q < 0$ per questa reazione. Per risolvere i problemi legati a queste particelle venne introdotto un nuovo numero quantico , chiamato *stranezza* , che si indica con \mathcal{S} : si assunse che le particelle come $n, p, \Delta, N^*, \pi, \rho, \omega, \eta$ avessero $\mathcal{S} = 0$. Per i mesoni e bosoni strani si assunse invece $\mathcal{S} \neq 0$. In particolare si assegnó $\mathcal{S} = 1$ al K^+ . In seguito si postuló che la stranezza totale di un sistema si conserva nei processi in cui intervengono interazioni forte o elettromagnetiche , non si conserva invece per le interazioni deboli. Visto che il processo di produzione del K^+ e del K^- é dato da un'interazione forte si ha $\mathcal{S}(K^-) = -1$ mentre³ $\mathcal{S}(K^0) = +1$. Si noti che questa particella equivale ad un neutrone di stranezza diversa da 0. Ci si puó chiedere in che forma si possa scrivere l'interazione di questa particella con i nucleoni. L'interazione é forte , e a corto range, quindi lo scattering si puó descrivere in funzione dei soli parametri a (*scattering length*) e r_0 (*raggio efficace*). I parametri caratteristici sono

$$\begin{cases} a = (-1,8 \pm 0,2)\text{fm} \\ r_0 = (3,16 \pm 0,52)\text{fm} \end{cases} \quad (2.21)$$

Si osservi che l'interazione $\Lambda - p$ é simile a quella N-N anche se piú debole e senza stati legati. Data la difficoltà di produrre fasci di particelle Λ polarizzati, la lunghezza di scattering del processo tiene conto di una somma di pesi statistici del singoletto e del tripletto. La particella mediatrice di questa interazione non puó essere un pione altrimenti la stranezza , nel processo $\Lambda \rightarrow p + \pi^-$ non si conserverebbe. Si deve supporre che la particella mediatrice sia un Kaone , in modo che la stranezza si conservi. Si puó schematizzare la situazione in figura.

²I barioni strani vengono detti *iperoni*

³Questa ultima relazione é facilmente dimostrabile se considera il processo $\pi^- + p \rightarrow p + K^0 + K^-$, di interazione forte. Il bilancio delle stranezze si puó scrivere come $0 + 0 = 0 + 1 - 1$, dunque la stranezza di K^0 deve essere necessariamente 1.



Si noti che un processo di questo tipo non potrebbe avvenire spontaneamente visto che $Q < 0$, ma in questo caso il K^- è una particella virtuale che può quindi violare la conservazione dell'energia in una frazione di tempo Δt compatibile con l'indeterminazione energia-tempo. Un altro modo di studiare l'interazione $N\Lambda$ consiste nell'eccitare un nucleo in modo che al suo interno si formi una particella Λ : un nucleo di questo genere è detto *ipernucleo*⁴.

Si noti che nel secondo caso l'interazione è mediata da 2 pioni, quindi si tratta di TPE (*Two Pion Exchange*).

2.3.3 Barione Σ

Di questo barione esistono 3 diversi tipi :

- Σ^+ , $m_{\Sigma^+} = 1189,4 \text{ MeV}$
- Σ^0 , $m_{\Sigma^0} = 1192,6 \text{ MeV}$
- Σ^- , $m_{\Sigma^-} = 1177,5 \text{ MeV}$

Tali diversi tipi si possono interpretare come tripletto di Isospin, quindi $T = 1$ e $J^\Pi = 1/2^+$. Queste particelle possono essere prodotte attraverso il processo di scattering⁵

$$\pi^- + p \rightarrow \Sigma^- + K^+ \quad (2.22)$$

Un altro processo possibile è

$$K^- + p \rightarrow \Sigma^+ + \pi^- \quad (2.23)$$

I decadimenti possibili sono $\Sigma^- \rightarrow n + \pi$ con $\tau_{\Sigma^-} = 1,5 \cdot 10^{-10} \text{ s}$ e $\Sigma^+ \rightarrow p + \pi^0 (\rightarrow n + \pi^+)$ con $\tau_{\Sigma^+} = 0,8 \cdot 10^{-10} \text{ s}$. Per quanto riguarda invece Σ^0 il processo di produzione è dato da $K^- + p \rightarrow \Sigma^0 + \pi^0$: decade con il processo $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda + \gamma$ ed ha una vita media di $\tau_{\Sigma^0} = 0,7 \cdot 10^{-19} \text{ s}$. Visto che in questo processo si conserva la stranezza e visto il tempo di decadimento l'interazione di decadimento sarà molto probabilmente elettromagnetica.

2.3.4 Barione Ξ

Le sue caratteristiche sono $m_{\Xi} = 1318 \text{ MeV}$ e $T = 1/2$; $J^\Pi = 1/2^+$. Esistono due stati di carica Ξ^0 con $m_{\Xi^0} = 1315 \text{ MeV}$ e Ξ^- con massa $m_{\Xi^-} = 1321 \text{ MeV}$. Questo particolare barione viene prodotto tramite il processo

$$K^- + p \rightarrow \Xi^- + K^+ \quad (2.24)$$

Se si calcola il bilancio delle stranezze si ottiene che deve essere necessariamente $\mathcal{S}(\Xi^-) = -2$: in effetti la sezione d'urto dimostra che è un processo forte dunque questo tipo di ragionamento è applicabile. La particella Ξ decade debolmente attraverso i decadimenti

⁴Una descrizione accurata degli ipernuclei è data nell'apposito capitolo.

⁵Si noti che al secondo termine non è presente p visto che si deve conservare il numero di barioni.

- $\Xi^0 \rightarrow \Lambda + \pi^0$ con $\tau_{\Xi^0} = 2,9 \cdot 10^{-10} s$
- $\Xi^- \rightarrow \Lambda + \pi^-$ con $\tau_{\Xi^-} = 1,6 \cdot 10^{-10} s$

Si noti che non avviene il decadimento $\Xi^0 \rightarrow \Sigma^0 + \pi^0$ poiché $Q < 0$.

2.3.5 Barione Ω^-

É il piú massivo di tutti, infatti $m_{\Omega^-} = 1673 \text{ MeV}$. A differenza degli altri $J^\Pi = 3/2^+$; $T = 0$. La stranezza si ricava facendo il bilancio sulla reazione di produzione

$$K^- + p \rightarrow \Omega^- + K^+ + K^0 \quad (2.25)$$

Si ricava quindi $\mathcal{S}(\Omega^-) = -3$. La vita media é di $\tau_{\Omega^-} = 0,8 \cdot 10^{-10} s$ mentre i decadimenti possibili sono dati da

- $\Omega^- \rightarrow \Lambda + K^-$
- $\Omega^- \rightarrow \Xi^0 + \pi^-$
- $\Omega^- \rightarrow \Xi^- + \pi^0$

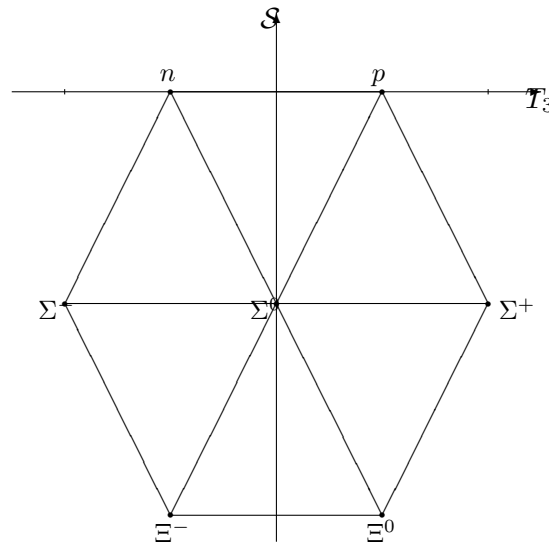
Visto che i processi sono deboli in questi la stranezza non si conserva ma cambia di un'unit , come si vede esplicitamente. Si noti che non avviene il processo $\Omega^- \rightarrow \Xi^0 + K^-$ poich , in questo caso, $Q < 0$.

2.3.6 Ottetti e decupletti Barionici

Vediamo di riassumere i barioni che hanno la coppia spin-parit  in comune. Per $J^\Pi = 1/2^+$ si ha la seguente tabella

$J^\Pi = 1/2^+$			
$\mathcal{S} = 0$		p, n	$(T = \frac{1}{2})$
$\mathcal{S} = -1$	Λ	$(T = 0), \Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-$	$(T = 1)$
$\mathcal{S} = -2$		Ξ^-, Ξ^0	$(T = \frac{1}{2})$

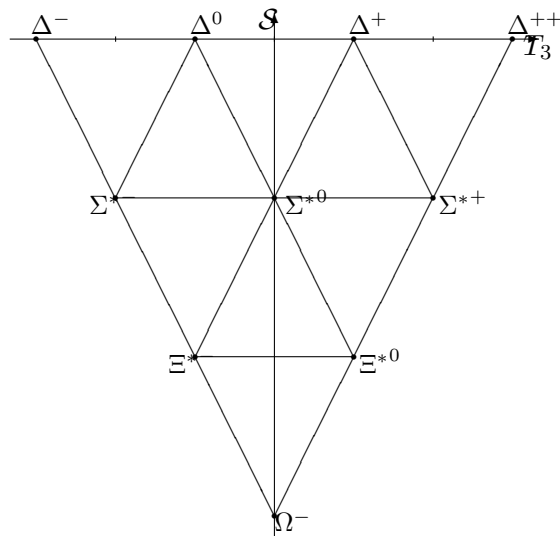
Tale configurazione   detta *Ottetto Barionico*. Queste particelle possono essere riprodotte anche in un grafico.



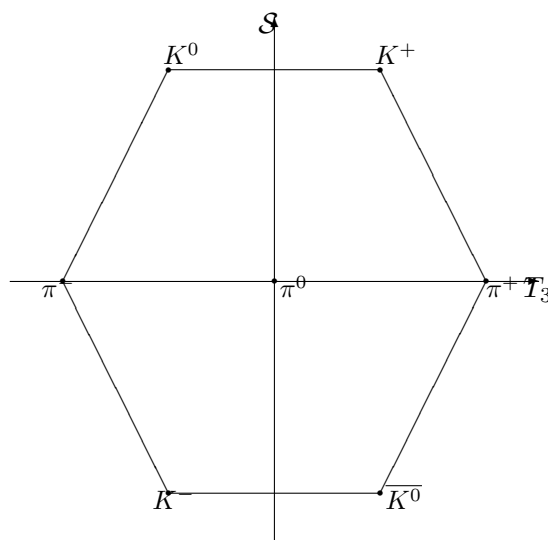
Raggruppando i barioni di spin-parità $J^{\Pi} = 3/2^{+}$ si ottiene la tabella⁶

$J^{\Pi} = 3/2^{+}$		
$\mathcal{S} = 0$	$\Delta^{++}, \Delta^{+}, \Delta^{0}, \Delta^{-}$	$(T = 3/2)$
$\mathcal{S} = -1$	$\Sigma^{*+}, \Sigma^{*0}, \Sigma^{*-}$	$(T = 1)$
$\mathcal{S} = -2$	Ξ^{*0}, Ξ^{*-}	$(T = 1/2)$
$\mathcal{S} = -3$	Ω^{-}	$(T = 0)$

Anche per il decupletto si può fare un grafico simile.



Lo stesso metodo grafico si può applicare anche ai mesoni, ottenendo



2.4 Ipernuclei

Nella sezione relativa alla particella Λ sono già state descritte le caratteristiche fisiche. Si vuole ora descrivere l'interazione che essa stabilisce con un nucleone, eccitando un nucleo :

⁶Le risonanze di tipo Σ^{*}, Ξ^{*} sono analoghe al caso visto in (2.18).

tale sistema é detto ipernucleo. La reazione di eccitazione é data da

$$K^- + {}^A X \rightarrow {}^A_{\Lambda} X + \pi^- \quad (2.26)$$

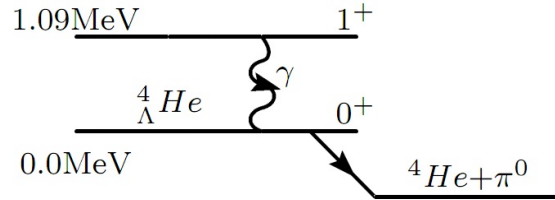
dove A é il numero totale di barioni , ovvero $A = N + Z + N_{\Lambda}$. In laboratorio si riescono a produrre ipernuclei con Λ e Σ . All'interno del nucleo avviene la reazione

$$K^- + n \rightarrow \Lambda + \pi^- \quad (2.27)$$

Si noti che questo nucleo non é stabile ma decade con la reazione

$$\Lambda \rightarrow p + \pi^- (n + \pi^0) \quad (2.28)$$

Supponiamo ora di aver prodotto un ipernucleo Λ dell'ossigeno con $A = 17$: in questo caso si può utilizzare il modello a shell osservando che nell'ultimo livello energetico ($1d_{5/2}$) é presente una particella Λ . In questo caso non é più accettabile la combinazione $J^{\Pi} = 5/2^+$ per la presenza della particella Λ : é giusta la combinazione $J^{\Lambda} = 1/2^+$. Si consideri invece l'ipernucleo Λ dell'elio-4 : visto che $\vec{J} = \vec{j}_n + \vec{j}_{\Lambda}$ si ha che $J = 0, 1$. Anche questo nucleo non é stabile ma decade in un atomo di elio-4 ed un pione π^0 . La reazione é riportata nella figura seguente.



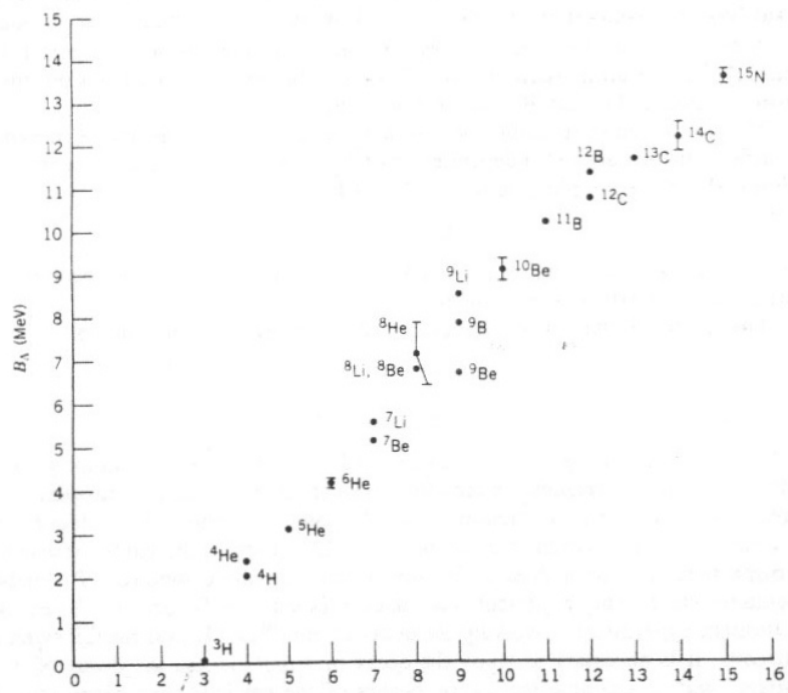
É anche possibile misurare l'energia di legame , B , della particella Λ nel sistema dell'ipernucleo utilizzando questo decadimento ottenendo $B_{\Lambda}({}^4_{\Lambda} He) = 2, 33$ MeV. Questa energia deve essere confrontata con quella del normale nucleo $B({}^4 He) = 28$ MeV ricordandosi però di dividere per 4 visto che B_{Λ} rappresenta l'energia , in media, per ogni nucleone. Si ottiene quindi

$$\frac{B({}^4 He)}{4} = 7 \text{ MeV} > B_{\Lambda}({}^4_{\Lambda} He) \quad (2.29)$$

quindi la particella nell'iperone é meno legata. Misurando indirettamente la massa del nucleo si può avere una stima dell'energia di legame della particella Λ utilizzando il bilancio

$$B_{\Lambda} = [m(\Lambda) - M({}^{A-1} X) - M({}^A_{\Lambda} X)] c^2 \quad (2.30)$$

I risultati sperimentali per B_{Λ} sono raccolti nel seguente grafico.



Capitolo 3

Classificazione delle particelle

La divisione bosoni-fermioni si basa sullo spin e sulla parità della funzione d'onda. Esistono altri modi per classificare le particelle : si possono infatti dividere le particelle a secondo dell'interazione che sviluppano con altre.

Adroni Risentono dell'interazione forte e delle altre.

Barioni Adroni a spin semiintero

Mesoni Adroni a spin intero

Leptoni Non risentono dell'interazione forte

Le masse dei Leptoni variano di molto e non seguono un andamento preciso.

Particella	e^-	μ^-	ν_e	ν_μ	τ^-	ν_τ
M [MeV]	0,511	105,7	< 2	$< 0,27$	1784	< 35

Si elencano ora le varie proprietà caratteristiche di queste particelle.

3.1 Proprietà generali

3.1.1 Parità

La parità si conserva in processi con interazione forte , ed elettromagnetici ma non con la debole

3.1.2 Numero barionico

Si assegna a tutti i barioni il numero barionico $B = +1$ mentre agli altri $B = -1$. In particolare ai mesoni si assegna $B = 0$, così come ai Leptoni. In base a tutti i processi osservati sperimentalmente si nota che B é sempre conservato. Questa conservazione si nota in processi del tipo

- $\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + \pi^0 + p$
- $p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$
- $e^+ + e^- \rightarrow p + \bar{p}$

Infine la legge di conservazione del numero barionico permette di affermare che non possono avvenire processi del tipo $p \rightarrow e^+ + \gamma$.

3.1.3 Numero Leptonico

Analogamente a quanto visto per il numero barionico esiste una legge di conservazione anche per il numero leptonico. Questo numero viene definito, a differenza di quello barionico, per una famiglia di leptoni. Esiste quindi il numero Leptonico elettronico L_e , il numero Leptonico muonico L_μ ed il numero Leptonico tauonico L_τ . Ovviamente all'elettrone corrisponde il tripletto $(L_e, L_\mu, L_\tau) = (1, 0, 0)$. I risultati di questa classificazione sono riportati nella tabella seguente.

		L_e	L_μ	L_τ
e^-	ν_e	1	0	0
e^+	$\bar{\nu}_e$	-1	0	0
μ^-	ν_μ	0	1	0
μ^+	$\bar{\nu}_\mu$	0	-1	0
τ^-	ν_τ	0	0	1
τ^+	$\bar{\nu}_\tau$	0	0	-1

Questa tabella rappresenta inoltre un valido strumento per bilanciare le reazioni con neutrini o antineutrini. Ad esempio nella reazione $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ é giusto utilizzare l'antineutrino. Analogamente si nota che il processo $e^- + e^- \rightarrow \pi^- + \pi^+$ non può avvenire perché non rispetterebbe la conservazione del numero leptonico. Ha senso invece un processo del tipo $e^- + e^- \rightarrow \pi^- + \pi^0$. Si noti che la conservazione del numero leptonico va fatta separatamente per ogni tipo di numero leptonico: a titolo di esempio si consideri la reazione $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$. La conservazione del numero Leptonico elettronico dá $0 = +1 - 1 + 0$ mentre quella del numero Leptonico muonico dá $+1 = 0 + 0 + 1$. Vediamo ora come sia possibile distinguere sperimentalmente le particelle ν_e e $\bar{\nu}_e$. A questo scopo si consideri il decadimento β dato da

$${}^A_Z X_N \rightarrow {}^A_{Z+1} Y + e^- + \bar{\nu}_e \quad (3.1)$$

Si supponga poi di prendere le particelle $\bar{\nu}_e$ e di utilizzarle per una nuova reazione $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$. La stessa cosa si può fare per ν_e provenienti dalla reazione $e^- + p \rightarrow n + \nu_e$: stavolta il processo é dato da $\nu_e + p \rightarrow n + e^+$. Questo processo é poco probabile quindi si nota che le due particelle ν_e e $\bar{\nu}_e$ forniscono risultati sperimentali diversi tra loro, dunque sono distinguibili.

3.1.4 Isospin

Si supponga di aver fissato T . Se si indica con Q la carica elettrica e con \bar{Q} il suo valor medio allora l'isospin si può scrivere come

$$T_3 = \left(\frac{Q}{e} - \frac{\bar{Q}}{e} \right) = \frac{1}{e} (Q - \bar{Q}) \quad (3.2)$$

Ad esempio per $T = 3/2$ si hanno le particelle $\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0, \Delta^-$. Si calcola $Q_{\text{tot}}/e = 2$ mentre $\bar{Q}_{\text{tot}}/e = 2/4 = 1/2$ e si verifica che

$$T_3 = \left(\frac{Q}{e} - \frac{\bar{Q}}{e} \right) = 2 - 1/2 = 3/2 \quad (3.3)$$

3.2 Modello a quark degli adroni

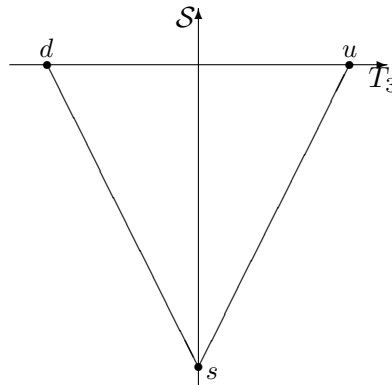
Questo modello fu proposto all'inizio degli anni '60 : si suppose che gli adroni fossero composti dai quark e che questi ultimi avessero $S = 1/2$. Tale ipotesi é necessaria visto che si deve spiegare l'esistenza di adroni che hanno anche spin semiintero, dunque il costituente elementare deve avere spin semiintero. I quark non esistono liberi , ma solo in stati legati che formano i mesoni , $q_1 q_2$, ed i barioni , $q_1 q_2 q_3$. Se si indicano poi i quark con la notazione u, d, s (*up, down, strange*) il numero di accoppiamenti possibili si può calcolare con il numero di combinazioni senza ripetizioni :

$$C_{n,k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} \Rightarrow C_{3,3} = 10 \quad (3.4)$$

Risulta quindi conveniente cercare di assegnare ai quark un numero barionico. Visto che un barione é composto da 3 quark segue che $B_q = 1/3$. Per i mesoni invece possiamo supporre che essi siano composti da q_1, \bar{q}_2 , dove \bar{q}_2 rappresenta un antiquark. Supponiamo ora di voler determinare la carica elettrica dei quark : a tale scopo si consideri il decupletto barionico che ha carica totale nulla. Si può calcolare la carica dei quark ragionando in questo modo : supponiamo , ad esempio , che la Δ^{++} sia formata dai 3 quark , $\Delta^{++} \equiv uuu$; da questa si ricava $Q_u/e = 2/3$. Analogamente si ricava $\Delta^- \equiv ddd \Rightarrow Q_d/e = -1/3$, $\Omega^- \equiv sss \Rightarrow Q_s/e = -1/3$. Si noti che in questo modello si stanno introducendo particelle che hanno come carica complessiva un multiplo (non intero!) della carica dell'elettrone. Riassumiamo quindi le principali caratteristiche dei quark nella tabella seguente.

Flavour	Spin	B	Q/e	T	T_3	S	Π	$m(\text{MeV})$
u	1/2	1/3	2/3	1/2	1/2	0	+1	5
d	1/2	1/3	-1/3	1/2	-1/2	0	+1	10
s	1/2	1/3	-1/3	0	0	-1	+1	150

I quark possono essere riportati in un grafico (T_3, S) , come già fatto per i mesoni e barioni , ottenendo il seguente.



Si noti che , nonostante il quark non esista libero , é stato comunque possibile dare una stima della massa. Questo é stato possibile definendo due masse per il quark : la massa costituente e la massa di corrente (misurata sperimentalmente in maniera indiretta). Fino ad adesso non sono stati osservati quark isolati : questa particolarità viene attribuita alla natura dell'interazione quark-quark. Questa é , schematicamente, approssimabile come crescente con la distanza quindi per allontanare due quark dovrei fornire una quantità sempre più crescente

di energia. Ad un certo punto avr  fornito talmente tanta energia da formare una coppia $q\bar{q}$ dei quali, uno andr  a rimpiazzare quello si sta tentando di estrarre mentre il rimanente andr  a formare un mesone ($|q\bar{q}\rangle$) con quello che si sta estraendo , non permettendo l'isolamento. Tutte le particelle principali viste fino ad ora si possono scrivere in funzione dei quark¹ :

- $p \equiv uud$
- $n \equiv udd$
- $\Lambda \equiv uds$
- $\pi^+ \equiv u\bar{d}$
- $\pi^- \equiv u\bar{d} = \bar{u}d$
- $\pi^0 \equiv u\bar{u}, d\bar{d}$

Si noti in particolare che $\pi^0 = \bar{u}u, \bar{d}d \equiv \pi^0$. Per i Kaoni si ha che

- $K^+ \equiv u\bar{s}$
- $K^0 \equiv d\bar{s}$
- $\bar{K}^+ = \bar{u}s = K^-$
- $\bar{K}^0 = \bar{d}s \neq K^0$

Si considerino ora le particelle del tripletto di isospin $T = 1$.

$$T = 1; S = 0 \implies \begin{cases} \pi^+, \pi^0, \pi^- & J^\Pi = 0^- , m_\pi = 140\text{MeV} \\ \rho^+, \rho^0, \rho^- & J^\Pi = 1^- , m_\rho = 770\text{MeV} \end{cases} \quad (3.5)$$

Si vuole capire come si spiega la differenza dei due stati formati dai quark $\pi^+ = u\bar{d}$; $\rho^+ = u\bar{d}$: in effetti queste due particelle sono composte dalla stessa combinazione di quark ma hanno masse completamente differenti , come visto in (3.5). Il pione   l'adrone pi  leggero quindi si pu  supporre che la coppia $u\bar{d}$ si trovi nello stato con ℓ pi  piccolo possibile, ovvero $\ell = 0$ e lo stato ha parit  negativa. Con $J = 0$ si pu  comporre solo $S = 0$. Analogamente supponiamo per il mesone ρ^+ che sia $\ell = 0$ e dunque la parit  sia nuovamente negativa. Per avere $J = 1$ stavolta deve essere $S = 1$. Dunque i due stati sono fondamentalmente diversi , visto che il primo (π) rappresenta un'onda 1S_0 mentre il secondo (ρ^+) un'onda 3S_1 : questi due livelli² sono giustamente spazati energeticamente. Si noti che anche in questa interazione si nota una dipendenza dallo spin.

3.3 Massa dei quark

Si riportano le masse dei quark gi  visti nella sezione precedente³.

- $u \equiv \text{up} \implies m_u = 1,5 \div 3 \text{ MeV}$

¹Si noti che $\pi^0 \neq s\bar{s}$ in virt  della conservazione dell'isospin , infatti $T(\pi^0) = 1$ e $T(s\bar{s}) = 0$.

²Sperimentalmente si osservano anche gli stati con $\ell = 1, 2$; $S = 0, 1$: la risonanza b_1 a 1323 MeV   data dallo stato $\ell = 1, S = 0, J^\Pi = 1^+$.

³Si noti che il simbolo \div non indica la divisione ma deve essere letto come *tra... e...*

- $d \equiv \text{down} \implies m_d = 3 \div 7 \text{ MeV}$
- $s \equiv \text{strange} \implies m_s = 95 \pm 25 \text{ MeV}$
- $c \equiv \text{charm} \implies m_c = 1,27 \pm 0,1 \text{ GeV}; \quad Q = \frac{2}{3}e$
- $b \equiv \text{bottom} \implies m_b = 4,20 \pm 0,1 \text{ GeV}; \quad Q = -\frac{1}{3}e$
- $t \equiv \text{top} \implies m_t = 175 \pm 7 \text{ GeV}; \quad Q = \frac{2}{3}e$

In particolare le masse appena illustrate rappresentano la massa corrente dei quark. In effetti la massa dei quark si può interpretare in due modi

Massa Corrente : massa di un quark libero. Visto che i quark non esistono isolati, non ha molto senso parlare di massa corrente. Si pensa che, comprimendo più adroni, si possa arrivare ad una situazione, detta di *libertà asintotica*, nella quale i quark si comportano come liberi : tale materia è detta *quark-gluon-plasma*. Questo stato è raggiungibile solo con altissime energie (non possibili in laboratorio) o ad altissime densità , ad esempio nelle stelle di neutroni.

Massa Costituente : massa efficace che presentano i quark quando sono legati e formano gli adroni. Ad esempio si può considerare la massa dei quark u e d come $1/3$ della massa di un nucleone. Infatti , visto che $m_p \simeq m_n$, $m_u \simeq m_d \sim m_N/3$.

3.4 Colore dei quark

Si consideri la particella $\Delta^{++} \equiv uuu$; $J^\Pi = 3/2^+$. Questa rappresenta l'adrone più leggero tra quelli con $J = 3/2$ quindi è plausibile assumere che $\ell = 0$ e che lo stato sia combinazione degli spin $|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle$. Con queste ipotesi la funzione d'onda radiale , così come quella di spin, è simmetrica rispetto agli scambi di particella : questo non è in accordo con l'ipotesi che la particella Δ sia un fermione⁴ Inoltre non è rispettato il principio di Pauli visto che i quark si trovano tutti nello stesso stato quantico . Per ovviare a questo problema si introduce un nuovo numero quantico , detto *colore* , che può variare tra $G(\text{green}), R(\text{red})$ e $B(\text{blue})$ ⁵. Ovviamente esistono anche gli opposti dei colori , $\bar{R}, \bar{G}, \bar{B}$: il colore va pensato come una estensione della carica con la differenza che , nel caso elettromagnetico , esiste solo la carica e l'anticarica mentre , nel caso dei colori, esistono 3 tipi di colori e i relativi opposti. Si noti che gli adroni non mostrano caratteristiche di colore : in questi i colori si mescolano quando i quark vanno a formare la particella in modo da avere un colore totale risultante nullo=BIANCO. Valgono le proprietà

- $B + R + G = 0$
- $B + \bar{B} = R + \bar{R} = G + \bar{G} = 0$

La funzione d'onda complessiva di un adrone si scrive quindi come

$$\psi = \psi_{\text{spin}} \psi_{\text{spazio}} \psi_{\text{flavour}} \psi_{\text{colore}} \quad (3.6)$$

⁴Questi hanno, per definizione, funzione d'onda totale antisimmetrica.

⁵Per distinguere i quark di diversi colori verrà apposto un apice : u_R, u_G, u_B .

La parte relativa al colore cambia nei barioni e nei mesoni.

$$\psi_{\text{colore}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{6}} [RGB + GBR + BRG - RBG - GRB - BGR] & \text{barioni} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} [R\bar{R} + G\bar{G} + B\bar{B}] & \text{mesoni} \end{cases} \quad (3.7)$$

L'esistenza della Δ^{++} a 1232 MeV con $J^{\Pi} = 3/2^{+}$ può essere spiegata solo con l'aggiunta di questo numero quantico. Si noti che il colore di un quark, analogamente ad altre grandezze fisiche, può variare nel tempo.

3.4.1 Interazioni tra Quark

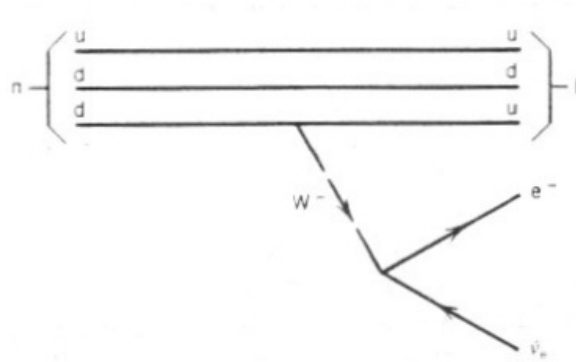
La particella mediatrice delle interazioni tra quark è il *gluone*, particella senza massa e con spin 1. Il campo che lega i quark è il campo di colore: si vede quindi che il colore non è soltanto un numero quantico correttivo, ma rappresenta la fonte dell'interazione forte tra i quark (analogo della carica per l'interazione E.M.). Il gluone deve portare due tipi di carica colorata: 1 colore e 1 anticolore. FIGURE Si noti che

1. Le interazioni forti NON possono cambiare il flavour di un quark. Possono solo avvenire riarrangiamenti di quark nelle particelle.
2. Coppie quark-antiquark possono essere create e annichilate.
3. Le interazioni deboli possono cambiare il flavour dei quark, mediante i bosoni vettoriali W^{\pm} e Z^0 . Si ha che $m_W \simeq 80 \text{ GeV}/c^2$, $m_Z \simeq 90 \text{ GeV}/c^2$. I processi in cui i quark cambiano flavour si possono scrivere come

$$u \rightarrow d + W^{+} \quad ; \quad \bar{u} \rightarrow \bar{d} + W^{-} \quad (3.8)$$

$$s \rightarrow u + W^{-} \quad ; \quad \bar{s} \rightarrow \bar{u} + W^{+} \quad (3.9)$$

Ad esempio nel processo $n \rightarrow p + e^{-} + \bar{\nu}_e$ uno dei quark d che compongono il neutrone cambia flavour con la reazione $d \rightarrow u + W^{-}$, ottenuta dalla prima delle precedenti equazioni mediante lo scambio di W^{+} .



3.4.2 Prove dell'esistenza dei quark e del loro colore

Prendiamo uno scattering $e^{+}e^{-}$ (elettrone-positrone) ad alte energie. Nell'immagine seguente si osservano sciami adroni. Questo si può spiegare osservando il processo dal punto di vista dei quark. La reazione è del tipo $e^{+} + e^{-} \rightarrow \gamma \rightarrow q + \bar{q}$: la coppia quark-antiquark, allontanandosi in direzione opposta, aumenta l'energia creando coppie quark-antiquark che ricombinandosi creano adroni.

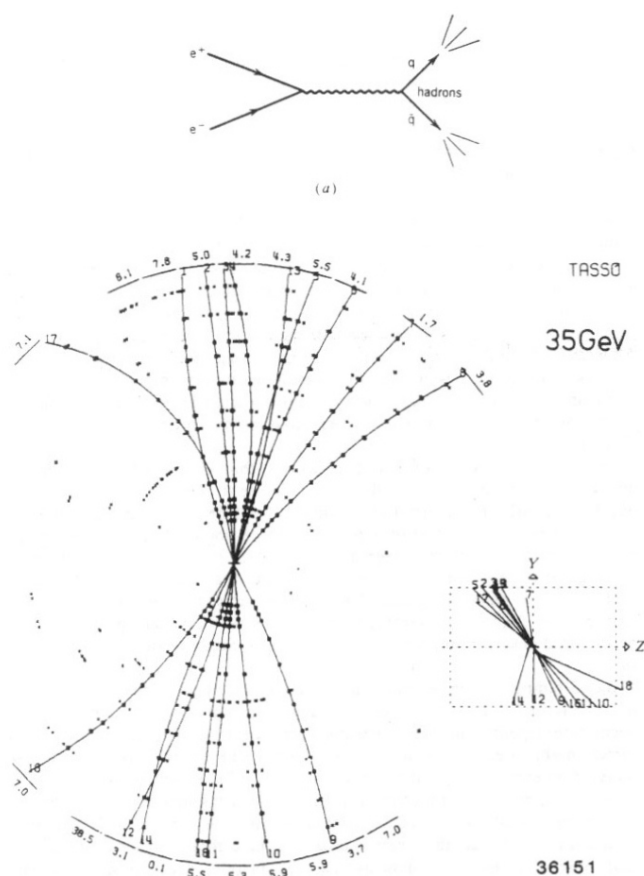


Figure 18.17 (a) A two-jet event, in which q and \bar{q} each produce a shower of hadrons. (b) A relatively less-common three-jet event, in which one of the quarks radiates a gluon, which also creates a shower of hadrons. The visible tracks show the trajectories of the hadrons, bent into arcs by a magnetic field. Experimental results are from DESY.

L'esistenza del colore venne invece provata confrontando le sezioni d'urto dei due processi $e^+ + e^- \rightarrow \text{Adroni}$ e $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$. Il risultato sperimentale di (3.10) può infatti essere spiegato solo con l'aggiunta del colore come nuovo grado di libertà. Teoricamente si otterrebbe infatti un risultato tre volte più piccolo: l'errore sta nel considerare i soli 3 gradi di libertà relativi ai flavour dei quark mentre aggiungendo i colori si arriva a 9.

$$R = \frac{\sigma(e^+ + e^- \rightarrow \text{Adroni})}{\sigma(e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-)} \simeq 2 \quad (3.10)$$

Capitolo 4

Decadimenti α

L'emissione spontanea di una particella α é rappresentata dal seguente processo¹

$${}^A_Z X_N \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2} Y_{N-2} + \alpha \quad (4.1)$$

Il decadimento α é un effetto della repulsione Coulombiana : in effetti quest'ultima diventa significativa per nuclei pesanti in quanto , mentre la forza Coulombiana cresce con Z^2 , la forza di legame dei nuclei cresce approssimativamente come A . L'emissione della particella α si spiega osservando che l' 4_2He é un nucleo doppiamente magico, quindi molto legato, ed il bilanciamento energetico é per questo molto favorevole. Si vogliono cercare i nuclei avvantaggiati per questo tipo di decadimento studiando il segno di Q : se $Q > 0$ la reazione sará avvantaggiata, non avverrá altrimenti. La conservazione dell'energia impone

$$M_X c^2 = M_Y c^2 + T_Y + m_\alpha c^2 + T_\alpha \quad (4.2)$$

É quindi facile ricavare il Q di reazione²

$$Q = M_X - M_Y - M_\alpha = T_\alpha + T_Y \quad (4.3)$$

Il decadimento avviene spontaneamente solo se $Q > 0$. Dalla conservazione dell'impulso segue che il nucleo Y e la particella α si muovono in direzioni opposte con impulso uguale in modulo : $p_\alpha = p_Y$. Sperimentalmente si osserva che per Y ed α vale $T \ll mc^2$. Si può quindi usare la cinematica non relativistica ponendo $T = p^2/2m$ per queste particelle ricavando

$$\begin{cases} T = p^2/2m \\ p_\alpha = p_Y \end{cases} \Rightarrow Q = T_\alpha + T_Y = \frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha} \left(\frac{M_\alpha + M_Y}{M_Y} \right) \Rightarrow T_\alpha = \frac{Q}{1 + M_\alpha/M_Y} \quad (4.4)$$

Il valore di T_α é misurabile (ad esempio con un spettrometro magnetico) quindi il valore di Q é calcolabile utilizzando la formula precedente. I Q calcolati con questo metodo sono riportati in tabella : si noti che il primo valore di $Q > 0$ corrisponde alla particella α .

Particella emessa	Q (MeV)
n	-7,26
p	-6,12
...	...
...	...
4He	5,41
5He	-2,59

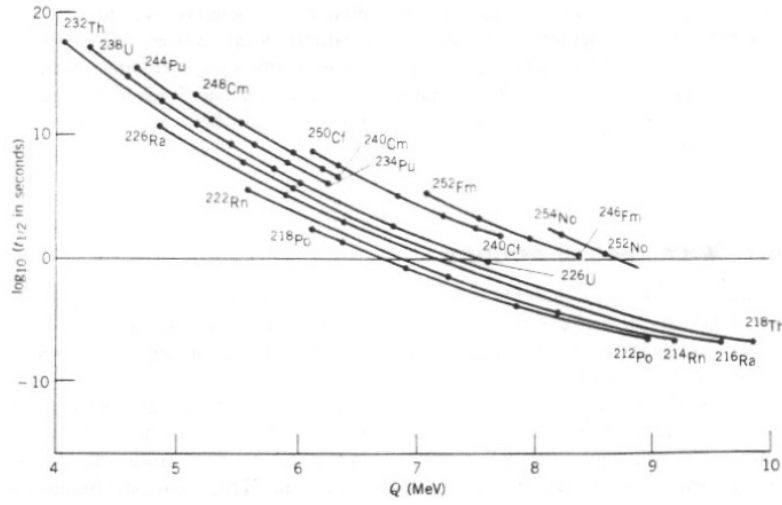
¹La particella α rappresenta un nucleo di 4_2He .

²Si ponga $c = 1$.

Procedendo con nuclei ancora piú massivi si trova che nuclei come ${}^9\text{Be}$ e ${}^{12}\text{C}$ hanno $Q > 0$. Studiando i nuclei massivi che decadevano α venne messa in evidenza un'importante proprietà : la vita media variava di molti ordini di grandezza a seconda del Q . Si consideri ad esempio ${}^{232}\text{Th}$ con $Q = 4,08$ MeV ed un altro isotopo ${}^{218}\text{Th}$ con $Q = 9,85$ MeV. Nonostante i due Q differiscano di un fattore 2 si osserva che le due vite medie variano da $\tau = 1,4 \cdot 10^{10}$ yr per il primo a $\tau = 1,07 \cdot 10^{-7}$ s per il secondo. Questo comportamento si può spiegare con l'introduzione della regola di *Geiger-Nuttal*.

$$Q \sim \frac{1}{t_{1/2}} \quad (4.5)$$

L'andamento sperimentale del tempo di dimezzamento é ben visibile nella seguente figura.



In generale si osserva che , per variazioni di $Q = (4 \div 10)$ MeV il tempo di vita varia tra $10^{-9} \text{ s} < \tau < 10^{17} \text{ yr}$. Per stabilire il segno di Q si può utilizzare la formula semi-empirica di massa visto nel primo modulo. Si tratta quindi di calcolare

$$Q = M_X - M_Y - M_\alpha$$

conoscendo

$$M_X = Zm_p + Nm_n - B(Z, A) \quad (4.6)$$

$$M_Y = (Z - 2)m_p + (N - 2)m_n - B(Z - 2, A - 4) \quad (4.7)$$

$$M_\alpha = 2m_p + 2m_n - B_\alpha \quad (4.8)$$

L'espressione per Q si semplifica

$$Q = B_\alpha + B(Z - 2, A - 4) - B(Z, A) \quad (4.9)$$

dove $B_\alpha = 28,3$ MeV. Utilizzando la formula semiempirica di massa

$$B(Z, A) = a_V A - a_s A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(A - 2Z)^2}{A} + \delta \quad (4.10)$$

per il primo ed il secondo nucleo e sostituendo nella(4.9) si ottiene

$$Q = B_\alpha + a_s \left[A^{2/3} - (A - 4)^{2/3} \right] + a_C \left[Z^2 A^{-1/3} - (Z - 2)^2 (A - 4)^{-1/3} \right] + \dots \quad (4.11)$$

Visto che $A \gg 4$ (stiamo considerando nuclei pesanti) si può sviluppare il termine di superficie (e tutti gli altri termini)

$$a_s \left[A^{2/3} - (A-4)^{2/3} \right] \simeq a_s A^{2/3} \left[1 - 1 + \frac{8}{3A} \right] = \frac{8}{3} a_s A^{-1/3} \quad (4.12)$$

In generale si utilizza lo sviluppo

$$(A-4)^\beta = A^\beta \left(1 - \frac{4}{A} \right)^\beta \simeq A^\beta \left(1 - \frac{4\beta}{A} \right) \quad (4.13)$$

Utilizzando lo stesso procedimento per gli altri termini si ottiene infine (stiamo considerando nuclei pari-pari)

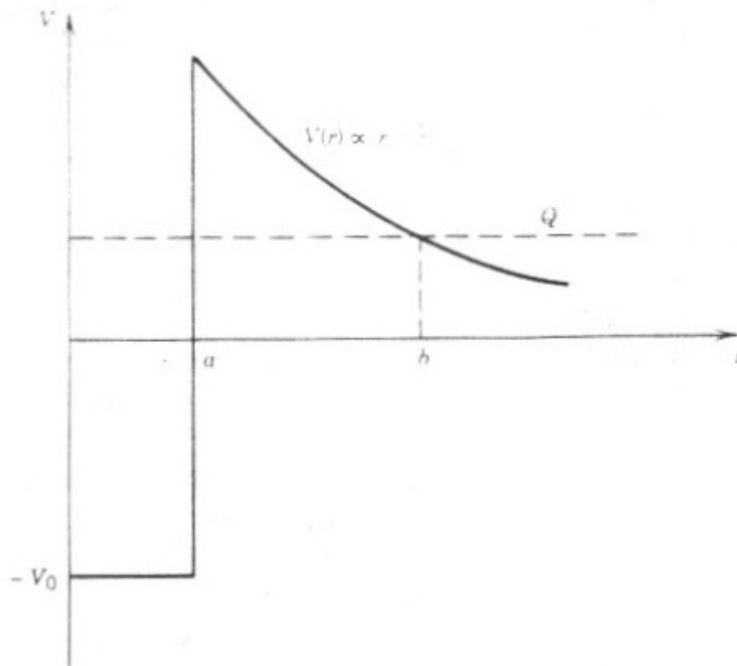
$$Q(Z, A) \simeq 28,3 - 4a_V + \frac{8}{3} a_s A^{-1/3} + 4a_C Z A^{-1/3} \left(1 - \frac{Z}{3A} \right) - 4a_{\text{sym}} \left(1 - \frac{2Z}{A} \right)^2 + 3a_p A^{-7/4} \quad (4.14)$$

Questa espressione per $Q(A, Z)$ definisce, a Q fissato , delle curve nel piano $Z - N$: la curva divide le due regioni dello spazio dove $Q > 0$ o $Q < 0$, ovvero indica quali sono gli elementi stabili e quelli che tendono a decadere α .

4.1 Modello di Gamow-Gurney-Condon

Venne introdotto per spiegare l'andamento della vita media in funzione di Q . Nel modello si suppone che la particella α sia già preformata nel nucleo : la probabilità di uscire dal nucleo é pari alla probabilità di penetrazione di una barriera di potenziale ed é legata alla vita media del decadimento. Il potenziale é di tipo Coulombiano

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & , \text{se } r \leq a \\ \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_\alpha Z_Y}{r} & , \text{se } r > a \end{cases} \quad (4.15)$$



Per dare una stima di a si può sommare il raggio nucleare a quello della particella α , $a \simeq R_Y + R_\alpha = (6 \div 8) \text{ fm}$. La profondità della buca è data invece da $V_0 = (35 \div 40) \text{ MeV}$. Visto che $Q = (4 \div 8) \text{ MeV}$ per questi tipi di reazione, manca da stimare solo l'altezza della barriera

$$B = V(r = a) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_\alpha Z_Y}{a} = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \right) \hbar c \frac{Z_\alpha Z_Y}{a} = \alpha \hbar c \frac{Z_\alpha Z_Y}{a} \simeq \frac{200}{137} \frac{Z_\alpha Z_Y}{a} \quad (4.16)$$

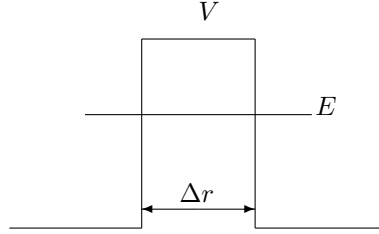
Scegliamo $a = 7 \text{ fm}$ e $Z_Y = 90$. Per questi valori si ottiene $B \simeq 37,5 \text{ MeV}$. In generale i valori critici di B si trovano nel range $B = (30 \div 40) \text{ MeV}$, ovvero $Q < B$ per ogni reazione, quindi classicamente la particella non potrebbe mai passare: il passaggio è dovuto all'effetto tunnel. Indichiamo con λ la probabilità di decadimento, $\lambda = 1/\tau$. In questo modello si suppone che λ sia proporzionale alla probabilità di penetrazione della barriera, moltiplicata per il numero di tentativi che la particella fa per passare, ovvero la frequenza con cui la particella tenta di penetrare la barriera. Questa si può stimare con $f = v_\alpha/a$ dove v_α si ottiene dalla conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2} m v_\alpha^2 = Q + V_0 \Rightarrow v_\alpha = \sqrt{\frac{2(Q + V_0)}{m c^2}} c \Rightarrow f = \sqrt{\frac{2(Q + V_0)}{m c^2}} \frac{c}{a} \quad (4.17)$$

Con una stima si ricava ($Q = 5 \text{ MeV}$, $V_0 = 35 \text{ MeV}$, $a = (6 \div 8) \text{ fm}$) $v_\alpha \simeq 0,15 \cdot c \Rightarrow f = 10^{21} \text{ Hz}$. Se definiamo poi con b il punto di inversione classica del moto si può stimare la larghezza della barriera:

$$V(r = b) = Q \Rightarrow b = \alpha \hbar c \frac{Z_\alpha Z_Y}{Q} \Rightarrow b \simeq 44 \text{ fm} \Rightarrow (b - a) \sim (35 \div 40) \text{ fm} \quad (4.18)$$

Si vuole calcolare ora la probabilità di penetrazione. Per fare questo si considera prima una barriera più semplice, rappresentata in figura.



La probabilità di penetrazione per questa barriera è nota ed è data da

$$P = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \frac{V^2}{E(V-E)} \sinh^2(k_b \Delta r)} \quad \text{con } k_b \equiv \frac{\sqrt{2m(V-E)}}{\hbar} \quad (4.19)$$

Convienne poi sviluppare

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow \sinh^2 x = \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} \quad (4.20)$$

Sappiamo che $m_\alpha \simeq 4000 \text{ MeV}$, $V \sim 35 \text{ MeV}$, $Q \sim 5 \text{ MeV}$, quindi sostituendo si trova $k_b \sim 2,4 \text{ fm}^{-1}$. Del resto $\Delta r \sim (b - a) \sim 30 \text{ fm}$, quindi $k_b \Delta r \sim 52 \gg 1$, quindi il termine dominante al denominatore è solo l'esponenziale crescente. Si ottiene quindi

$$P \sim e^{-2k_b \Delta r} = e^{-2 \frac{\sqrt{2m(V-Q)}}{\hbar} \Delta r} \quad (4.21)$$

a meno di un fattore costante che non si discosta molto da 1. Per dare una stima più realistica bisognerebbe risolvere l'equazione di Schrödinger per il potenziale realistico definito dalla (4.15). Il calcolo si può fare in maniera piuttosto esatta utilizzando l'approssimazione semiclassica di WKB³. Il risultato del calcolo è dato da

$$P = \frac{4\sqrt{(B-Q)(Q-V_0)}}{B-V_0} e^{-2G} \quad (4.22)$$

dove

$$G = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \int_a^b [V(r) - Q]^{1/2} dr \quad (4.23)$$

è il fattore di Gamow. Si deve quindi svolgere l'integrale $\int_a^b [V(r) - Q]^{1/2} dr$. Sviluppiamo

$$V(r) - Q = \alpha \hbar c \frac{Z_\alpha Z_Y}{r} - Q = Q \left(\frac{b}{r} - 1 \right) \quad (4.24)$$

Si definisce ora la variabile adimensionale $x \equiv r/b \Rightarrow dr = b dx$ quindi l'espressione si trasforma in

$$G = \frac{\sqrt{2mQ}}{\hbar} b \int_{x_0}^1 \left[\frac{1}{x} - 1 \right]^{1/2} dx, \quad \text{con } x_0 \equiv a/b = Q/B \quad (4.25)$$

Si sostituisce ora $x \equiv \cos^2 \phi \Rightarrow \sqrt{x} = \cos \phi \Rightarrow dx = 2 \cos \phi (-\sin \phi) d\phi$, $\phi_0 \equiv \arccos \sqrt{x_0}$. L'integrale diventa quindi

$$\begin{aligned} G &= \frac{\sqrt{2mQ}b}{\hbar} \int_{\phi_0}^0 \left(\frac{1 - \cos^2 \phi}{\cos^2 \phi} \right)^{1/2} 2 \cos \phi (-\sin \phi) d\phi \\ &= \frac{\sqrt{2mQ}b}{\hbar} \int_0^{\phi_0} \frac{\sin \phi}{\cos \phi} 2 \cos \phi \sin \phi d\phi \\ &= \frac{\sqrt{2mQ}b}{\hbar} \int_0^{\phi_0} \sin^2 \phi d\phi \\ &= \frac{\sqrt{2mQ}b}{\hbar} [\phi_0 - \sin \phi_0 \cos \phi_0] \\ &\equiv \frac{\sqrt{2mQ}b}{\hbar} F(x_0) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Il risultato dell'integrale si scrive quindi come

$$F(x_0) = \int_{x_0}^1 \left[\frac{1}{x} - 1 \right]^{1/2} dx = \arccos x_0^{1/2} - x_0^{1/2} (1 - x_0)^{1/2} \quad (4.27)$$

³In meccanica quantistica l'approssimazione WBK (Wentzel-Kramers-Brillouin) conosciuta anche come approssimazione WKBJ (Wentzel-Kramers-Brillouin-Jeffreys) è un'approssimazione semiclassica nella quale si impone che la funzione d'onda sia una funzione esponenziale che varia lentamente e quindi viene sviluppata in serie di potenze della costante di Planck.

Per $x_0 \ll 1$ si ha⁴ $F(x_0) \simeq \pi/2 - 2x_0^{1/2} = \pi/2 - 2\sqrt{Q/B}$. Visto che $\lambda = fP = \tau^{-1}$, e che $P \propto e^{-2G}$, si ricava

$$\ln \tau = \ln \left\{ \frac{a}{c} \sqrt{\frac{mc^2}{2(Q+V_0)}} \right\} + 2G \quad (4.30)$$

Basta esplicitare G ricordandosi della (4.27) e della seguente.

$$G = \frac{\sqrt{2mQ}}{\hbar} bF(x_0) = \frac{\sqrt{2mQ}}{\hbar} b \left[\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{Q}{B}} \right] = \alpha Z_\alpha Z_Y \sqrt{2mc^2} \left[\frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{Q}} - 2\sqrt{\frac{1}{B}} \right] \quad (4.31)$$

Combinando queste due equazioni si ricava quindi

$$\ln \tau = \ln \left\{ \frac{a}{c} \sqrt{\frac{mc^2}{2(Q+V_0)}} \right\} + 2\alpha Z_\alpha Z_Y \sqrt{2mc^2} \left[\frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{Q}} - 2\sqrt{\frac{1}{B}} \right] \quad (4.32)$$

Facendo un grafico di questa funzione si può studiare l'andamento della vita media relativamente ai parametri tipici del sistema che si sta considerando.

4.2 Processi favoriti

Si consideri il nucleo ^{220}Th : di questo sono stati osservati due decadimenti:

- $^{220}\text{Th} \rightarrow ^{216}\text{Ra} + \alpha$ con $Q_\alpha = 8,95$ MeV e $\tau_\alpha = 9,7$ μs
- $^{220}_{90}\text{Th} \rightarrow ^{208}_{84}\text{Po} + ^{12}_6\text{C}$ con $Q_C = 32,14$ MeV e $\tau_C = 3,3 \cdot 10^6$ s.

Per capire quale dei due decadimenti sia favorito si possono elencare le differenze sostanziali tra i due:

1. La barriera Coulombiana cambia nei due casi: nel primo⁵ si ha $B_\alpha \sim 2 \cdot 88 = 176$ MeV mentre per il secondo $B_C \sim 6 \cdot 84 = 504$. Quindi é avvantaggiata l'emissione della particella α .
2. Si nota che $Q_C > Q_\alpha$ quindi sembrerebbe avvantaggiata l'emissione del Carbonio.
3. É stata fatta l'ipotesi che la particella α fosse preformata nel nucleo: tale ipotesi é sempre valida nella seconda reazione, a patto per di intendere che la probabilità di tale preformazione é sicuramente minore di 1. Infatti é meno probabile che nel nucleo si preformi il Carbonio-12 piuttosto che una particella α . Matematicamente questa osservazione si concretizza nell'aggiunta di un termine w nell'espressione della vita media: $\lambda = fP \cdot w_C$. Ovviamente $w_C \ll w_\alpha$ quindi, nuovamente, é favorito il processo di emissione della particella α .

⁴Si sono utilizzati gli sviluppi

$$\arccos x \simeq \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 + \dots \quad (4.28)$$

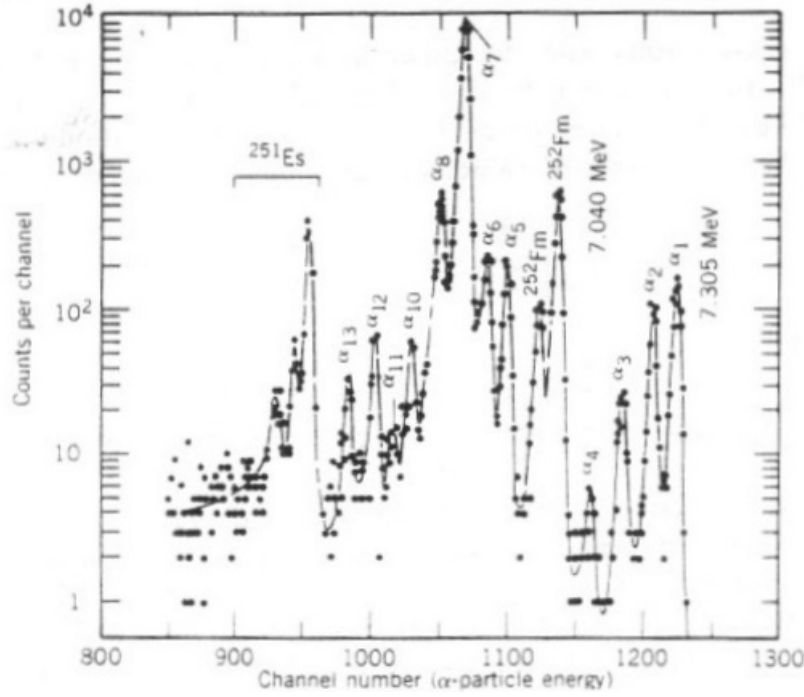
$$(1-x)^{1/2} \simeq 1 - \frac{x}{2} + \dots \quad (4.29)$$

arrestandosi al primo ordine.

⁵Si ricordi che $B \propto Z_\alpha Z_Y$.

4.3 Struttura fine degli spettri α

Il decadimento α é un processo a 2 corpi quindi l'energia della particelle α é ben determinata dalla conservazione dell'energia. Ci si aspetterebbe quindi che E_α si mantenga costante al variare di N_α . In realtà l'energia cambia, come si vede nella figura seguente nella quale é rappresentato lo spettro α relativo al decadimento del ^{251}Fm



Questo comportamento si può spiegare considerando che il nucleo figlio Y si trova in uno stato eccitato : il passaggio allo stato con E_α minore rappresenta la diseccitazione del nucleo che passa ad un altro stato energetico. Il processo é quindi del tipo



La particella α , essendo formata da 2 neutroni e 2 protoni tutti nello stato $1s$ e con gli spin accoppiati a 0, avrà momento angolare totale dovuto solo al momento angolare orbitale.

4.3.1 Momento angolare e parità

Si consideri ora la reazione standard dei decadimenti α , $X \rightarrow Y + \alpha$ e si supponga che il nucleo X si trovi in uno stato $J^\Pi = 0^+$. Il nucleo Y può decadere in vari stati energetici $0^+, 2^+, 4^+, 2^-, 3^+$: per valutare quale decadimento sia favorito si può utilizzare la conservazione del momento angolare e della parità. Applicando queste condizioni si ha

Conservazione momento angolare : $\vec{I}_i = \vec{I}_f + \vec{\ell}_\alpha$, visto che $I_\alpha = 0$. Allora $\ell_\alpha = (I_f + I_i), \dots, |I_f - I_i|$. In particolare se $I_i = 0 \Rightarrow \ell_\alpha = I_f$.

Conservazione parità : $\Pi_i = \Pi_f(-1)^{\ell_\alpha}$. Si distinguono due casi

- $\Pi_i = \Pi_f \Rightarrow \ell_\alpha$ pari
- $\Pi_i = -\Pi_f \Rightarrow \ell_\alpha$ dispari

Si vede quindi che sono permesse le transizioni $0^+ \rightarrow 0^+$, $0^+ \rightarrow 2^+$, $0^+ \rightarrow 4^+$ con momento angolare rispettivamente $\ell_\alpha = 0, 2, 4$ mentre non sono concesse le transizioni $0^+ \rightarrow 2^-$, $0^+ \rightarrow 3^+$. Se si osservano le intensità dei diversi stati si nota che quelli ad energia più grande (gli stati eccitati) hanno intensità sempre minori. Questo si può spiegare con due effetti

1. Se Q_0 è il Q della reazione quando il nucleo figlio decade nello stato fondamentale ed E^* è l'energia dello stato eccitato allora $Q^* = Q_0 - E^*$ e dunque $Q^* < Q_0$, quindi lo stato eccitato ha una vita media più lunga e dunque ha meno probabilità.
2. Nel considerare la probabilità di attraversamento della barriera abbiamo supposto $\ell = 0$, quindi il termine di potenziale centrifugo⁶ $\frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2mr^2}$ non era stato considerato. Questo termine aggiunge al potenziale un termine efficace che, per $\ell \neq 0$ innalza la barriera di potenziale, diminuendo così la probabilità di tunnelling.

Infine se si studia il decadimento del ^{238}Pu si nota che le energie dei livelli $8^+, 6^+, 4^+, 2^+, 0^+$ stanno nei seguenti rapporti tra di loro

$$\frac{E_4}{E_2} = 3,3; \frac{E_6}{E_4} = 2,07; \frac{E_6}{E_2} = 6,82; \frac{E_8}{E_6} = 1,68 \quad (4.35)$$

Questa separazione è dovuta alla presenza di uno spettro rotazionale. Le bande di questo spettro (bande rotazionali) hanno energia

$$E_J = \frac{\hbar^2 J(J+1)}{2\mathcal{I}} \quad (4.36)$$

dove \mathcal{I} rappresenta il momento di inerzia. Il rapporto tra i vari livelli energetici è quindi del tipo

$$\frac{E_n}{E_m} = \frac{n(n+1)}{m(m+1)} \quad (4.37)$$

questa formula è in buon accordo con i dati sperimentali.

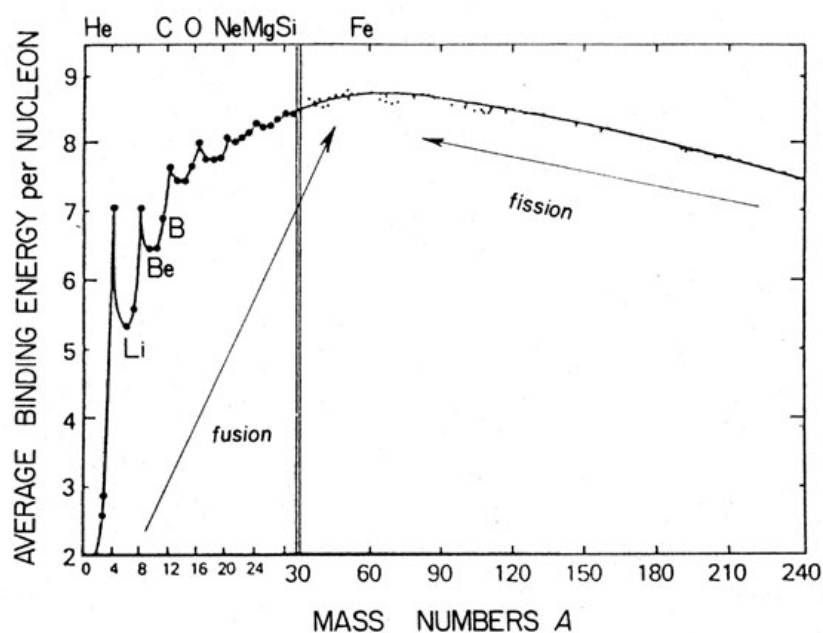
⁶Si ricordi che la parte radiale dell'equazione di Schrödinger per un campo centrale è data da

$$R'' + \frac{2}{r}R' + \left(k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right)R = 0 \quad (4.34)$$

Capitolo 5

Fusione Nucleare

É il meccanismo attraverso cui le stelle producono energie, inoltre é alla base di creazione di molti degli elementi presenti sulla terra.



Osservando la figura precedente si nota che , per estrarre energia dal nucleo , si possono far fondere tra loro nuclei leggeri , con A piccolo : questo significa che vengono utilizzati nuclei nella parte sinistra della curva relativa alla *binding energy*. Il processo di fusione si schematizza con la reazione

$$a + X \rightarrow Y + b \quad (5.1)$$

Il Q di reazione si scrive come $Q = m_a + m_X - m_Y - m_b$: ovviamente sono possibili le reazioni con $Q > 0$. La reazione di fusione piú semplice $p + p \rightarrow {}^2\text{He}$ non avviene a causa dell'instabilità dell' ${}^2\text{He}$. Le reazioni piú probabili si dividono in vari tipi

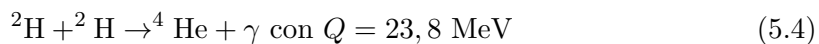
Reazioni p-p É un esempio la reazione

$$p + p \rightarrow {}^2\text{H} + e^+ + \nu_e \text{ con } Q = 1,44 \text{ MeV} \quad (5.2)$$

La sezione d'urto di questo processo é molto piú piccola rispetto al normale scattering pp e l'interazione é debole. La barriera Coulombiana per questi tipi di reazione si può calcolare come

$$B_{pp} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2R_p} \simeq 900\text{KeV} \quad (5.3)$$

Reazioni D-D Vengono fatti fondere due atomi di deuterio.

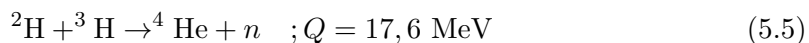


Perché si conservino l'energia e l'impulso c'è bisogno di un gap energetico aggiuntivo, rispetto ai processi p-p, fornito dal fotone. Risultano piú probabili processi del tipo

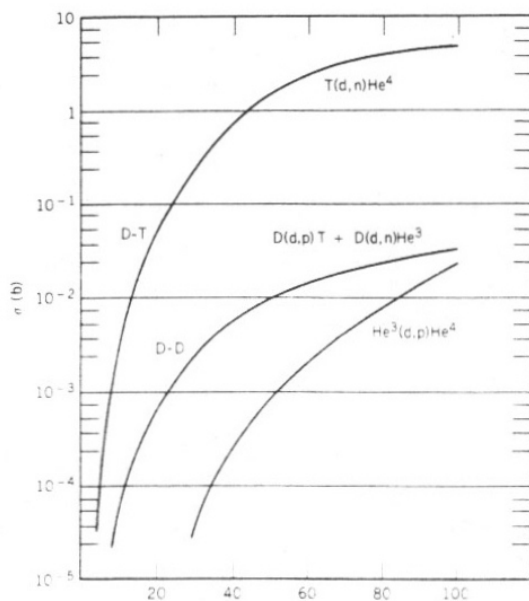
- $^2\text{H} + ^2\text{H} \rightarrow ^3\text{He} + n$ con $Q = 3,3 \text{ MeV}$
- $^2\text{H} + ^2\text{H} \rightarrow ^3\text{H} + p$ con $Q = 4 \text{ MeV}$

Inoltre si calcola $B_{DD} \sim 360 \text{ KeV}$.

Reazioni D-T Vengono fatti fondere un atomo di deuterio ed uno di trizio.



Nel grafico seguente vengono riportate le sezioni d'urto, al variare dell'energia per i tipi di processi appena elencati.



5.0.2 Temperatura

Volendo avere reazioni termonucleari di fusione, ovvero reazioni in cui l'energia dei nuclei di partenza é solo di agitazione termica, qual'è la temperature necessaria per attivare il processo di fusione ?

$$\begin{cases} \epsilon \sim k_B T \\ k_B \simeq 8,6 \cdot 10^{-5} \text{eV/K} \end{cases} \quad (5.6)$$

Se voglio, ad esempio, $k_B T \sim 1$ KeV serve una temperatura di $T \sim 10^7$ K. Nel sole si ha $T_\odot = 1,57 \cdot 10^7$ K, che corrisponde ad un'energia di 1,35 KeV. Si noti che non serve avere un'energia termica maggiore della barriera Coulombiana visto che questa può essere passata per effetto tunnel.

5.1 Sezione d'urto

La sezione d'urto per la fusione nucleare si può definire a partire dalla sezione d'urto definita per le interazioni nucleari e la probabilità di penetrazione della barriera Coulombiana. Si ottiene quindi

$$\sigma_{\text{fus}} = \sigma_{\text{nuc}} \cdot P \quad (5.7)$$

Nel caso di scattering NN a basse energie è già stato visto che si può considerare il solo contributo di $\ell = 0$ ottenendo

$$\sigma(\ell = 0) = \frac{1}{k^2} \sin^2 \delta_0(E) \quad (5.8)$$

quindi $\sigma \sim 1/k^2 \sim 1/E$. Poniamo quindi $\sigma_{\text{nuc}} = S(E)/E$, dove E è detto fattore astrofisico. Si ha quindi

$$\sigma_{\text{fus}} = \frac{S(E)}{E} e^{-2G} \quad (5.9)$$

dove G è il fattore di Gamow definito nella (4.23): conviene approssimare questa formula per il particolare caso della fusione.

$$G \simeq \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} b \left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{E}{B}} \right) \quad (5.10)$$

Innanzitutto si consideri il rapporto E/B : visto che le grandezze caratteristiche sono $B_{pp} \sim 900$ KeV, $B_{DD} \sim 350$ KeV e¹ $E \sim k_B T_\odot \sim 1,35$ KeV il rapporto $\sqrt{E/B}$ è trascurabile rispetto a $\pi/2$ quindi

$$G \simeq \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \frac{\pi}{2} b \quad (5.11)$$

Utilizzando la definizione di (4.16) G si può riscrivere² come

$$G \simeq \alpha Z_a Z_X \sqrt{\frac{2mc^2}{E}} \frac{\pi}{2} = \pi \alpha \frac{Z_a Z_X}{v/c} \quad (5.13)$$

Si è usata anche la relazione $E \sim mv^2/2$.

5.2 Reaction Rate

Per stimare la potenza prodotta da un reattore a fusione nucleare si deve conoscere il tasso di reazione che, a differenza della sezione d'urto, dipenderà anche dalla concentrazione delle specie che si considerano. Si definisce quindi

$$R = \frac{\text{n. reazioni}}{\text{Volume} \cdot \text{Tempo}} \quad (5.14)$$

¹Nel seguito verrà adottato il simbolo \odot per indicare una quantità relativa al sole.

²infatti

$$b = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_a Z_X}{E} = \alpha \hbar c \frac{Z_a Z_X}{v/c} \quad (5.12)$$

Per calcolare questo rapporto ci si riferisce sempre a processi del tipo $a + X \rightarrow b + Y$. Si supponga quindi di inviare un fascio di particelle a , a velocità v_a , verso un bersaglio X . Si indica con n_i la densità delle due specie di particelle, ovvero

$$n_X \equiv \frac{\mathcal{N}_X}{V} \quad ; \quad n_a \equiv \frac{\mathcal{N}_a}{V} \quad (5.15)$$

Si può quindi scrivere

$$R = n_X \sigma \Phi_a = n_X \frac{\sigma \mathcal{N}_a}{s \cdot t} \cdot \frac{v_a}{v_a} = n_a n_X \sigma v_a \quad (5.16)$$

dove σ è la sezione d'urto di fusione del processo. D'altronde la sezione d'urto è anche definita come (vd. Appunti del primo modulo)

$$\sigma = \frac{R_b}{I_a N_X} \quad (5.17)$$

dove I_a rappresenta il numero di particelle a inviate (per unit di tempo), R_b il numero di particelle b prodotte (sempre nell'unità di tempo) e con N_X il rapporto tra il numero di nuclei bersaglio X e la superficie F dove si fa la misura. Ovviamente tutte queste quantità hanno senso sperimentalmente solo se si considerano le rispettive medie: per la velocità occorrerà la distribuzione di *Maxwell-Boltzmann* data da

$$f_{\text{MB}}(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} \quad ; \quad \text{dove } \vec{v} = \vec{v}_a - \vec{v}_X \quad (5.18)$$

Quindi

$$\langle R \rangle = n_a n_X \langle \sigma v \rangle = n_a n_X \int_0^\infty \sigma f_{\text{MB}}(v) dv \quad (5.19)$$

per $a \neq X$. Nel caso particolare in cui le particelle che interagiscono sono della stessa specie si ottiene

$$\langle R \rangle = \frac{1}{2} n_a^2 \langle \sigma v \rangle \quad (5.20)$$

Si devono quindi studiare le due funzioni integrando nel termine $\langle \sigma v \rangle$. La sezione d'urto è data da (per la (5.9) e la (5.13))

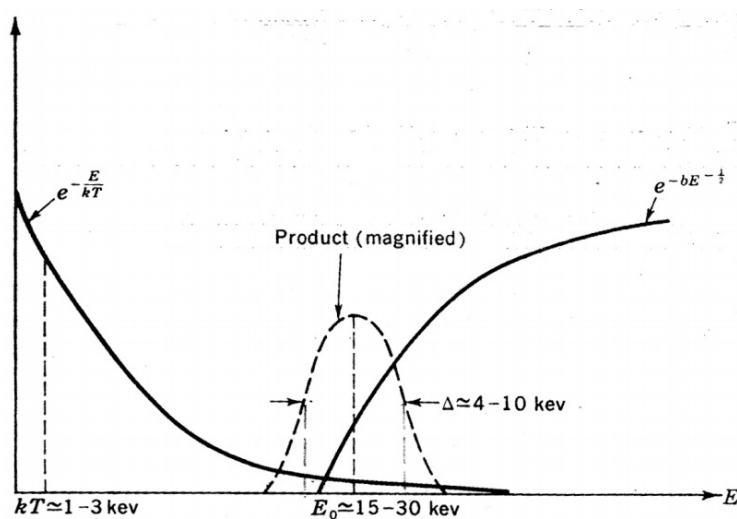
$$\sigma = \frac{S(E)}{E} \exp \left\{ -\frac{2\pi\alpha Z_a Z_X}{v/c} \right\} = \frac{S(E)}{E} \exp \left\{ -\pi\alpha \sqrt{2mc^2} Z_a Z_X \frac{1}{\sqrt{E}} \right\} \quad (5.21)$$

Se si definisce poi $\beta \equiv \pi\alpha \sqrt{2mc^2} Z_a Z_X \simeq 31,29 (\text{KeV})^{1/2} \left(\frac{m}{m_u} \right)^{1/2} Z_a Z_X$, dove $m_u = 931,494$ MeV è l'unità di massa atomica, la (5.21) diventa semplicemente³

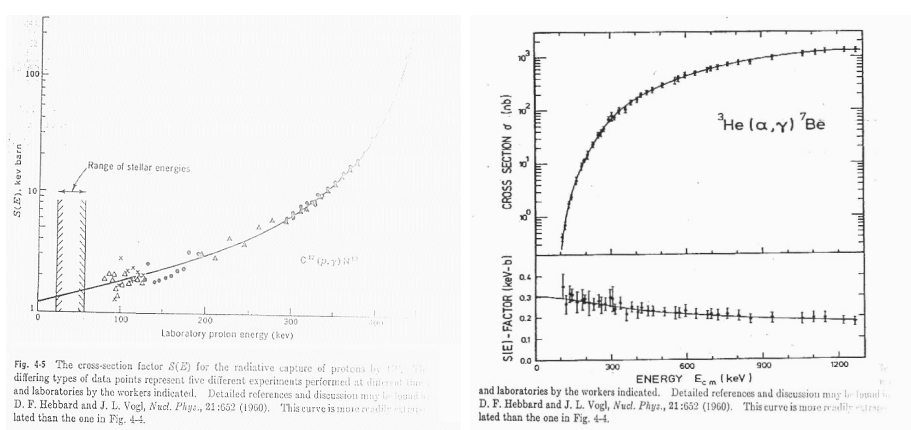
$$\sigma = \frac{S(E)}{E} e^{-\beta/\sqrt{E}} \quad (5.22)$$

La distribuzione di Maxwell-Boltzmann può essere scritta in funzione dell'energia relativa con un semplice cambiamento di variabili: $f_{\text{MB}} \propto E e^{-E/k_B T}$. Se si studia l'andamento delle due funzioni ed il loro prodotto si ottiene il grafico seguente

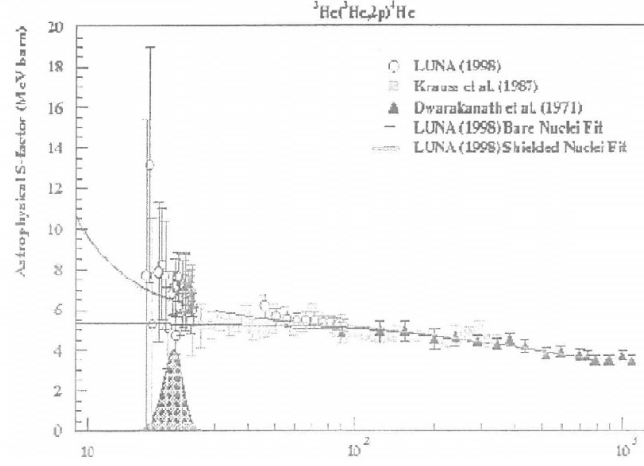
³Esiste anche la notazione equivalente $e^{-2\pi\eta(E)}$ con $\eta(E) = \frac{\alpha Z_a Z_X}{v/c}$.



Si vede quindi che la funzione integranda della (5.19) é trascurabile al di fuori di una piccola zona dove il prodotto delle due funzioni raggiunge un massimo (detto Picco di Gamow). Alla reazione contribuiscono quindi solo le particelle appartenenti alla coda della distribuzione di Boltzmann . La zona del picco di Gamow corrisponde ad un range di energie molto basse, difficilmente raggiungibili in laboratorio. Per ottenere l'andamento a queste energie si cerca quindi di ricavare l'andamento sperimentale ad alte energie in modo da trovare la curva che interpola bene i dati e ricavare l'andamento anche per basse energie , sotto i 100 KeV, del fattore $S(E)$.



Nell'esperimento L.U.N.A. del 1998 sono state raggiunte energie molto basse ed é stato osservato che il fattore astrofisico tende nuovamente ad aumentare



questo effetto é dovuto alla presenza della nube elettronica attorno ai nuclei (*screening*). Raggiungendo energie sempre piú basse si osserva che $S(E)$ si mantiene pressoché costante : utilizzeremo questa proprietà nel capitolo successivo.

5.2.1 Proprietá del picco di Gamow

Si vuole ora stimare l'energia del picco di Gamow in funzione della carica e della massa ridotta dei nuclei. Per fare questo si consideri la forma del rate medio

$$\langle \sigma v \rangle = \left(\frac{8}{\pi m} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{k_B T} \right)^{3/2} \int_0^\infty S(E) \exp \left\{ -\frac{E}{k_B T} - \frac{\beta}{\sqrt{E}} \right\} dE \quad (5.23)$$

Per trovare il massimo si può massimizzare la funzione integranda (supponendo $S(E)$ per quanto detto prima)

$$\frac{\partial}{\partial E} \left[\exp \left\{ -\frac{E}{k_B T} - \frac{\beta}{\sqrt{E}} \right\} \right]_{E=E_0} = 0 \quad (5.24)$$

Con semplici calcoli si ottiene

$$E_0 = \left(\frac{\beta k_B T}{2} \right)^{2/3} = 1,22 \cdot \left(Z_a^2 Z_X^2 \frac{m}{m_u} T_6^2 \right)^{1/3} \text{ KeV} \quad (5.25)$$

dove si é utilizzata la notazione $T_6 = T/10^6$ K. Dopo aver ricavato il massimo si può ottenere anche la larghezza utilizzando il metodo di Laplace⁴

$$\exp \left\{ -\frac{E}{k_B T} - \frac{\beta}{\sqrt{E}} \right\} \simeq C \exp \left\{ -\left(\frac{E - E_0}{\Delta/2} \right)^2 \right\} \quad (5.26)$$

Le costanti C e Δ si calcolano facilmente fittando la curva con una Gaussiana : si ottiene quindi

$$\Delta = \frac{4}{3} (E_0 k_B T)^{1/2} \Rightarrow E_0 = (10 \div 30) \text{ KeV}; \quad \Delta = (10 \div 20) \text{ KeV} \quad (5.27)$$

da confrontare con le energie tipiche $k_B T = (1 \div 3) \text{ KeV}$.

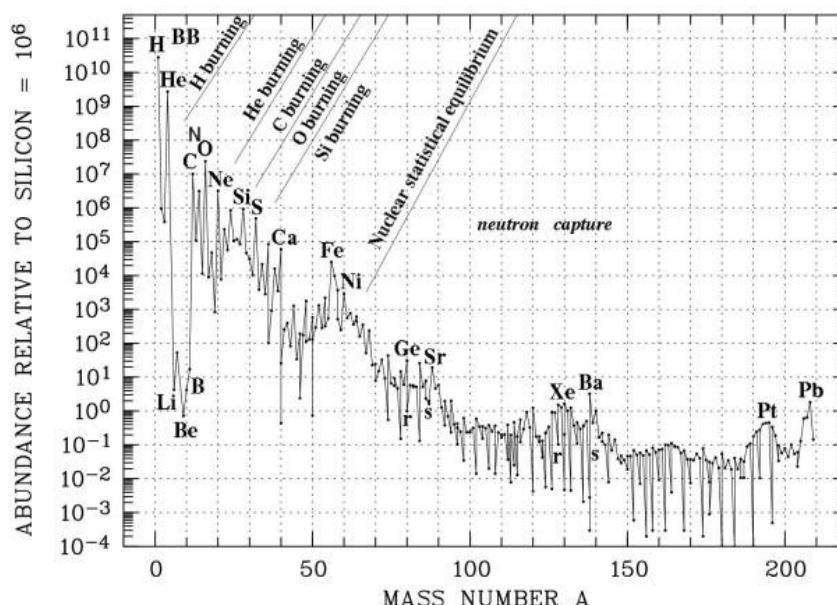
⁴Si supponga di dover calcolare $I = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-F(x)} dx$, dove $g(x)$ dipende debolmente da x . Nel punto di massimo x_0 si può sviluppare $F(x) = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) + (1/2)F''(x_0)(x - x_0)^2 = F(x_0) + (1/2)F''(x_0)(x - x_0)^2$. Data la debole dipendenza da x di g l'integrale si può quindi riscrivere come $I \simeq g(x_0) e^{-F(x_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -F''(x_0) \frac{(x - x_0)^2}{2} \right\} dx$. Quindi si può approssimare $e^{-F(x)}$ come una Gaussiana.

5.3 Risonanze della fusione

Si prenda il processo $p + {}^{12}\text{C} \rightarrow {}^{13}\text{N} + \gamma$, che avviene nel sole. Osservando l'andamento della sezione d'urto di fusione in funzione dell'energia si nota una deviazione dal comportamento standard, che consiste in un picco a $\sim 0,5$ MeV. Si interpreta questo picco come una risonanza, analogamente a quanto fatto per le Δ : questa particolare risonanza rappresenta uno stato eccitato metastabile del ${}^{13}\text{N}$.

5.4 Nascita degli elementi

Se si osserva un grafico dell'abbondanza relativa agli elementi costituenti il sistema solare si osserva come l'idrogeno sia presente per il 90 % e l'elio per circa il 9%.



Questa abbondanza relativa può essere spiegata con la teoria del Big Bang. Si teorizza che nello stato primordiale la materia fosse altamente densa e calda: queste caratteristiche fisiche la costrinsero a reagire per formare nuovi elementi. All'inizio i quark erano separati (non esistevano solo in stati legati) e formavano il cosiddetto stato di *quark-gluon-plasma* (QGP); in seguito i quark si legarono per formare adroni e diedero luogo ad elettroni, protoni e neutroni. In questo stadio la temperatura era di circa $T \simeq 7,5 \cdot 10^9$ K. La densità era ancora molto alta quindi il rate di reazione era elevato e sufficiente a superare la barriera Coulombiana: tramite fusione si crearono i nuovi elementi ${}^4\text{He}$, ${}^2\text{H}$, ${}^3\text{He}$, ${}^7\text{Li}$. Man mano che l'universo si andava espandendo la temperatura e la densità diminuivano quindi la barriera Coulombiana si alzava e non c'erano più le condizioni per creare nuovi elementi tramite fusione. Tutti gli altri elementi sono stati prodotti dalle stelle, dove la concentrazione era abbastanza elevata da poter dar luogo a nuove reazioni di fusione, e portati nell'universo grazie alla loro presenza nella nube primordiale.

5.5 Catena pp - Processi di fusione protone/protone

Questi sono i principali processi che avvengono nel sole, del quale ricordiamo le caratteristiche fisiche.

- $M_{\odot} = 1,989 \cdot 10^{33} \text{ g}$
- $R_{\odot} = 6,96 \cdot 10^5 \text{ km}$
- $T_{\odot}^{\text{core}} = 1,57 \cdot 10^7 \text{ K}$
- $T_{\odot}^{\text{sup}} \simeq 6000 \text{ K}$
- $\rho_{\odot}^{\text{core}} \simeq 130 \text{ g/cm}^3$
- $L_{\odot} = 3,846 \cdot 10^{33} \text{ erg/s}$

Il processo



é già stato analizzato. Dato che il positrone tende a reagire con un altro elettrone il Q_{tot} della reazione va calcolato sommando quello di entrambi i processi : per la prima reazione si ha $Q = 0,42 \text{ MeV}$ mentre per la seconda $Q_{e^+e^-} = 1,02 \text{ MeV}$ dunque in totale $Q_{\text{tot}} = 1,44 \text{ MeV}$. La sezione d'urto di questo processo é molto piccola visto che l'interazione responsabile é quella debole : prendendo infatti energie tipiche di 1 KeV si ha $\sigma(\sim 1 \text{ KeV}) \simeq 10^{-33} \text{ Barn}$. Tuttavia il sole tramite questi processi é in grado di produrre molta energia visto che ha molti protoni a disposizione. Per stimare quindi il rate delle reazioni nel sole prendiamo innanzitutto il rate per protone (per la 5.20) :

$$\frac{\text{rate}}{\text{n. protoni}} = \frac{\langle R_{pp} \rangle}{n_p} = \frac{1}{2} n_p \langle \sigma v \rangle_{pp} \simeq 5 \cdot 10^{-18} \text{ reaz/sec} \quad (5.29)$$

Basta quindi moltiplicare questo risultato per il numero di protoni per ottenere il rate totale. Per ricavare il numero di protoni si può fare una stima grossolana dividendo la massa del sole per la massa dei protoni : l'ordine di grandezza del risultato é corretto.

$$\mathcal{N}_p \simeq \frac{M_{\odot}}{m_p} = \frac{2 \cdot 10^{33}}{1,6 \cdot 10^{-24}} \simeq 10^{57} \text{ protoni} \quad (5.30)$$

Ovviamente non tutti questi protoni sono disponibili per la fusione : si può supporre che solo 1/10 di questi abbia le condizioni termiche opportune per reagire. Dunque

$$\mathcal{N}_p^{\text{burn}} \simeq \frac{1}{10} \mathcal{N}_p \sim 10^{56} \Rightarrow \mathcal{N}_{\text{reaz}} = 5 \cdot 10^{-18} \cdot 10^{56} \sim 10^{38} \text{ reaz/sec} \quad (5.31)$$

Quindi nonostante la sezione d'urto sia molto bassa il rate di reazione é molto grande. Si può stimare anche la massa dell'idrogeno consumata al secondo

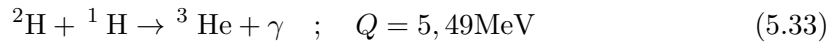
$$\frac{m_{\text{burn}}}{\text{s}} \simeq 10^{14} \text{ g/sec} \simeq 10^8 \text{ ton/sec} \quad (5.32)$$

Riprendiamo ora in esame il processo di produzione della (5.28).

1. Per quanto riguarda ${}^2\text{H}$ sono probabili i seguenti processi

- (a) ${}^2\text{H} + {}^1\text{H} \rightarrow {}^3\text{H} + e^+ + \nu_e$: processo debole, σ piccola.
- (b) ${}^2\text{H} + {}^2\text{H} \rightarrow {}^4\text{He} + \gamma$: abbondanza del deuterio scarsa , quindi probabilità molto bassa che la reazione avvenga.
- (c) ${}^2\text{H} + {}^1\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + \gamma$: é la piú avvantaggiata.
- (d) ${}^2\text{H} + {}^2\text{H} \rightarrow {}^3\text{H} + p$: abbondanza del deuterio scarsa , quindi probabilità molto bassa che la reazione avvenga.

Si sceglie quindi la reazione



2. Per quanto riguarda ${}^3\text{He}$ sono possibili i seguenti processi

- (a) ${}^3\text{He} + {}^1\text{H} \rightarrow {}^4\text{Li} + \gamma$ non avviene perché il litio non é in uno stato legato.
- (b) ${}^3\text{He} + {}^1\text{H} \rightarrow {}^4\text{Li} \rightarrow {}^2\text{H} + {}^2\text{H}$ non é possibile poiché $Q < 0$.
- (c) ${}^3\text{He} + {}^1\text{H} \rightarrow {}^4\text{He} + e^+ + \nu_e$ viene detto processo *hep* ed ha un $Q = 19,28\text{ MeV}$. É rilevante in quanto, nonostante la sezione d'urto molto bassa (dovuta ad un processo debole) , genera i neutrini piú energetici e quindi maggiormente rilevabili.
- (d) ${}^3\text{He} + {}^2\text{H} \rightarrow {}^5\text{Li}$ non é possibile perché il litio non si trova in uno stato legato
- (e) ${}^3\text{He} + {}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} + {}^2\text{H}$ con $Q = 12,82\text{ MeV}$.

Il processo piú avvantaggiato é quindi



Ricapitolando dunque la catena di processi piú probabile nel sole é data da

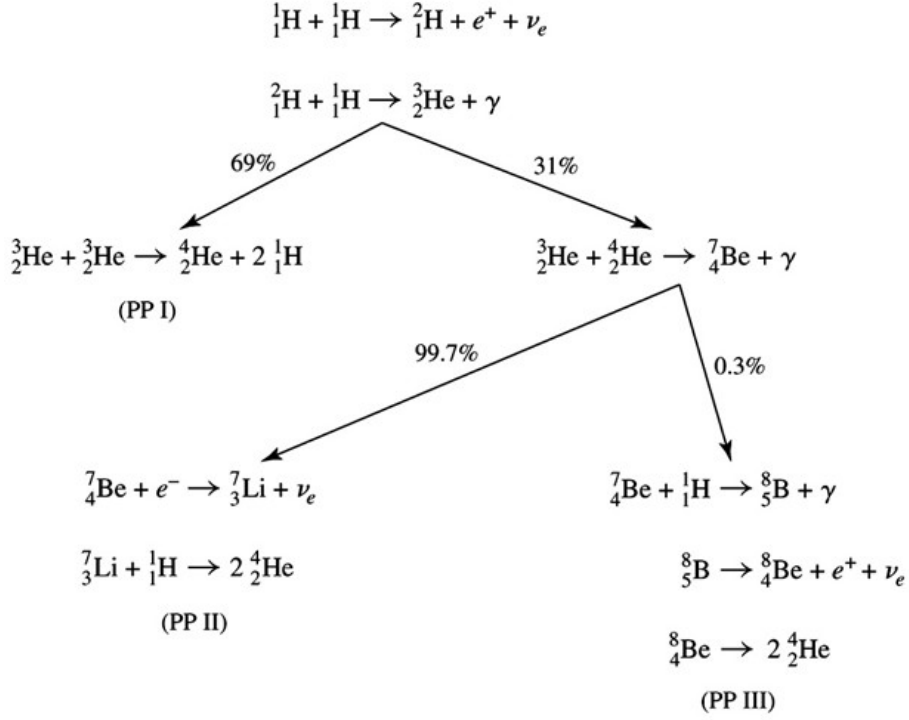


Il bilancio totale della reazione é dato da

Particelle $4{}^1\text{H} \Rightarrow {}^4\text{He} + 2e^+ + 2\nu_e$

Energia $Q_{\text{tot}} = 26,72\text{ MeV}$

Questo ramo di reazioni , il piú probabile, viene chiamato *ppI*. Esistono anche i rami *ppII*, *ppIII* : per avere un'idea della divisione di questi processi si faccia riferimento all'immagine seguente.



Si osservi che il bilancio delle particelle , cosí come (piú o meno) quello energetico , é lo stesso nei tre cicli. Visto che nelle reazioni sono coinvolti neutrini occorre tener conto dell'energia irradiata da questi : si definisce quindi un Q_{eff} che tenga conto di questa perdita di energia. Risulta quindi naturale porre $Q_{\text{eff}} \equiv Q_{\text{tot}} - E_{\text{neutrini}}$. Nel caso dei rami analizzati prima si ottiene

Processo	Q_{eff} [MeV]
$pp\text{I}$	26,2
$pp\text{II}$	25,66
$pp\text{III}$	19,17

L'avanzamento della reazione dipende , oltre che dalla concentrazione dei reagenti, dalla temperatura. Questa dipendenza é ben visibile se si cerca di ricavare la variazione della concentrazione di deuterio utilizzando

$$\frac{d}{dt}n_d = R_{pp} - R_{pd} = \frac{1}{2}n_p^2\langle\sigma v\rangle_{pp} - n_p n_d\langle\sigma v\rangle_{pd} \quad (5.38)$$

Le medie $\langle\sigma v\rangle$ infatti sono funzioni della temperatura T . L'equazione (5.38) é risolvibile ricavando prima la soluzione in condizioni stazionarie : all'equilibrio la variazione sará nulla. Dopo aver illustrato tutte le caratteristiche microscopiche dei processi che avvengono nel sole e nelle stelle si possono fare alcune interessanti stime. Ad esempio si può calcolare la binding energy del sole e vedere se é trascurabile rispetto all'energia totale. L'energia di legame dei protoni é data da

$$B_{\odot} = N_{p_{\odot}}m_p - M_{G_{\odot}} \quad (5.39)$$

In particolare, per il sole si ha che $M_{G_{\odot}}c^2 \simeq 2 \cdot 10^{33} \text{g} \cdot c^2$ dove $1 \text{g} \cdot c^2 = 9 \cdot 10^{20} \text{erg}$. Si ottiene quindi $M_{\odot}c^2 = 1,8 \cdot 10^{54} \text{erg}$. La binding energy può essere scritta come

$$B = \frac{3}{5} \frac{GM_{\odot}^2}{R_{\odot}} = \frac{1}{2} \frac{3}{5} \frac{2GM_{\odot}}{c^2} \frac{M_{\odot}c^2}{R_{\odot}} = \frac{3}{10} \frac{R_{\text{sch}_{\odot}}}{R_{\odot}} M_{\odot}c^2 \quad (5.40)$$

ove R_{sch} rappresenta il raggio di Schwarzschild⁵. Per il sole $B \sim 10^{34}$ erg, da confrontare con l'energia totale $\sim 10^{54}$ erg. Nelle stelle di neutroni il rapporto tra queste due energie é di 1 a 10 : la stella nella compattazione libera una quantità di energia molto più alta di quella del sole. Utilizzando i dati a disposizione si può fare una stima del tempo di vita solare supponendo che l'energia venga prodotta con il meccanismo illustrato. É già stato visto che nel ciclo ppI si ha $Q \simeq 26,7$ MeV. Inoltre é noto il numero di protoni disponibili per la fusione, ovvero $1/10$ della (5.30). Per calcolare l'energia liberata dal sole basta moltiplicare il numero di protoni disponibili per il Q di reazione ottenendo

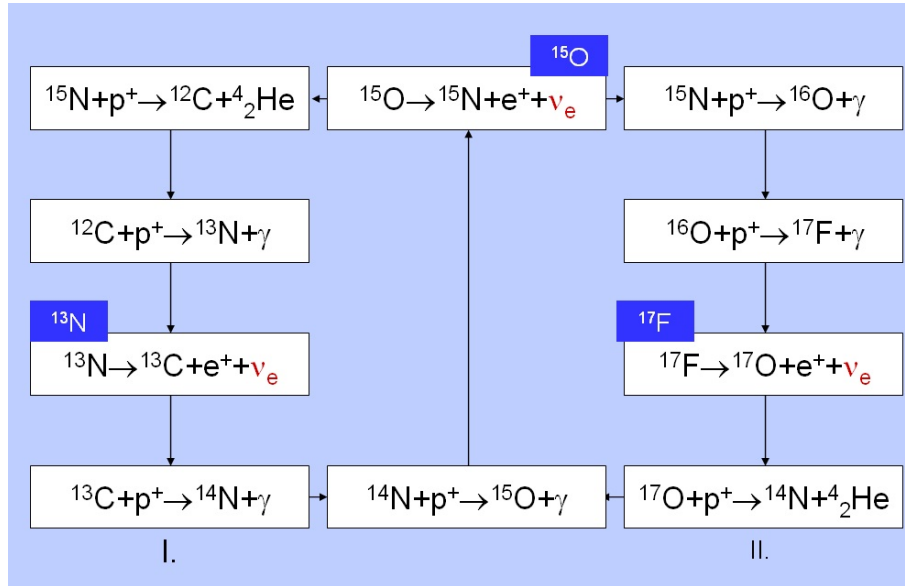
$$E_{\text{tot}} = Q \frac{\mathcal{N}_p^{\text{burn}}}{4} \simeq 10^{51} \text{ erg} \quad (5.41)$$

si noti che il 4 al denominatore é stato aggiunto visto che 4 protoni si uniscono per formare una particella α . Infine per stimare la vita del sole si può calcolare

$$t_{\odot} = \frac{E_{\text{tot}}}{L_{\odot}} = \frac{10^{51} \text{ erg}}{3,8 \cdot 10^{33} \text{ erg/s}} \simeq 2,6 \cdot 10^{17} \text{ s} \simeq 8 \cdot 10^9 \text{ yr} \quad (5.42)$$

5.6 Ciclo CNO

Un altro tipo di ciclo presente nelle stelle é quello di tipo CNO : in questo caso la stella deve avere a disposizione carbonio quindi deve trattarsi di una stella di seconda generazione. Il ciclo complessivo é mostrato in figura⁶.



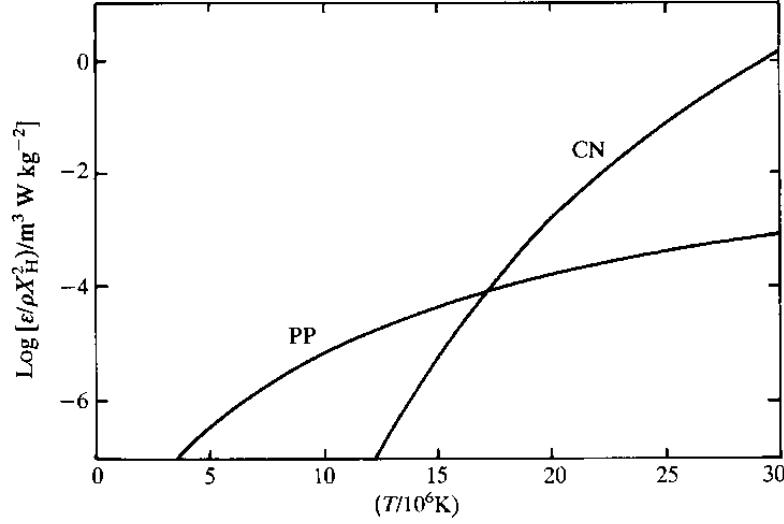
Si noti che il ^{12}C agisce da catalizzatore per la reazione perché viene sempre riutilizzato : se questo non é presente la reazione non può iniziare. Il bilancio totale del processo da



⁵Il raggio di Schwarzschild rappresenta il raggio critico per il quale la velocità di fuga relativa ad un corpo diventa c : oggetti con $r < r_{\text{sch}}$ sono definiti buchi neri visto che neanche la luce riesce a sfuggire all'immenso campo gravitazionale prodotto dalla loro supermassività.

⁶Con la notazione p^+ in figura si intende, ovviamente, il protone, ovvero equivalentemente ^1H come indicato fin'ora.

Il ciclo *CNO* sembrerebbe favorito rispetto al *ppI* visto che la prima reazione di quest'ultimo é un processo debole. Nonostante questo il ciclo *CNO* fornisce solo una piccola parte dell'energia proveniente dal sole : per risolvere questo dubbio basti osservare che la barriera Coulombiana nel primo processo é molto piú alta dunque la reazione é meno favorita. Il ciclo *CNO* é favorito solo a temperature basse ; dopo una certa temperatura il ciclo *ppI* diventa dominante , come si osserva bene nella figura seguente.



Queste predizioni teoriche si possono verificare sperimentalmente studiando i neutrini provenienti dal sole. Infatti questi non interagiscono con la materia e conservano le informazioni riguardanti il processo che li ha generati. Proprio per questo motivo tali esperimenti devono essere condotti sotto terra , alla profondità maggiore possibile, in modo da separare gli eventi buoni da quelli non rilevanti sperimentalmente.

5.7 Modello Solare Standard

Il modello solare standard rappresenta il miglior modello ad oggi disponibile per descrivere il comportamento fluidodinamico , chimico e fisico del sole. Analizziamo schematicamente le varie equazioni che compongono questo modello.

1. Inizialmente bisogna scrivere l'equazione di equilibrio idrostatico per una distribuzione di materia a simmetria sferica non in rotazione⁷.

$$\begin{cases} \frac{dP}{dr} = -G \frac{m(r)\rho(r)}{r^2} \rightarrow \text{gradiente di pressione} \\ \frac{dm}{dr} = 4\pi\rho(r)r^2 \rightarrow \text{distribuzione della massa} \end{cases} \quad (5.45)$$

Per risolvere questo sistema serve un'equazione di stato per il materiale stellare , ovvero bisogna conoscere la variazione di pressione in funzione della densit  del materiale e delle coordinate spaziali.

⁷La prima equazione si ottiene con il bilancio

$$dS[P(r) - P(r + dr)] - F_g(r) = 0 \quad \text{con } F_g(r) = G \frac{m(r)\rho(r) dV}{r^2} \quad (5.44)$$

2. Visto che il corpo é composto da vari materiali bisognerà conoscere la concentrazione di ognuno di essi. La seconda equazione per il modello é quindi data schematicamente dalla seguente

$$P \equiv P(\rho, X, Y, Z) \quad (5.46)$$

dove sono state definite X : abbondanza di ^1H ; Y : abbondanza di ^4He ; Z : abbondanza dei metalli. La pressione avrà due contributi : uno dovuto alla materia stessa e uno che dipende dalla radiazione ($\propto T^4$ per *Stefan-Boltzmann*).

$$P = P_{\text{gas}} + P_{\text{rad}} = K\rho T + \frac{1}{3}aT^4 \quad (5.47)$$

3. Bisogna inoltre conoscere la luminosità

$$L_{\odot} = \int_0^{R_{\odot}} \varepsilon_{\text{nucl}}(r) 4\pi r^2 \rho(r) dr \quad (5.48)$$

e la sua legge di variazione

$$\frac{dL}{dr} = \varepsilon_{\text{nucl}} \rho(r) 4\pi r^2 \quad (5.49)$$

dove ε rappresenta la quantità di energia prodotta nel punto r per unità di massa e unità di tempo. Si osservi che la prima equazione rappresenta la condizione al contorno per la risoluzione della seconda. Ovviamente questa dipenderà da

$$\varepsilon_{\text{nucl}} = \varepsilon_{\text{nucl}}(\langle \sigma v \rangle_{ij}, \rho, X, Y, Z, T) \quad (5.50)$$

Si dovrà scrivere un'equazione anche per il trasporto di energia che potrà essere sia radiativo che convettivo. Risolvendo tutte queste equazioni si possono determinare gli spettri dei neutrini emessi dal sole , verificando le ipotesi teoriche. Si nota che il calcolo di questi spettri é molto sensibile ad una piccola variazione di temperatura. Ad esempio nel caso della reazione $^8\text{B} \rightarrow ^8\text{Be} + e^+ + \nu$ con $N_{\nu} \sim T^{13}$. Quindi i neutrini possono essere utilizzati come termometro per studiare la temperatura del sole.

5.8 Neutrini

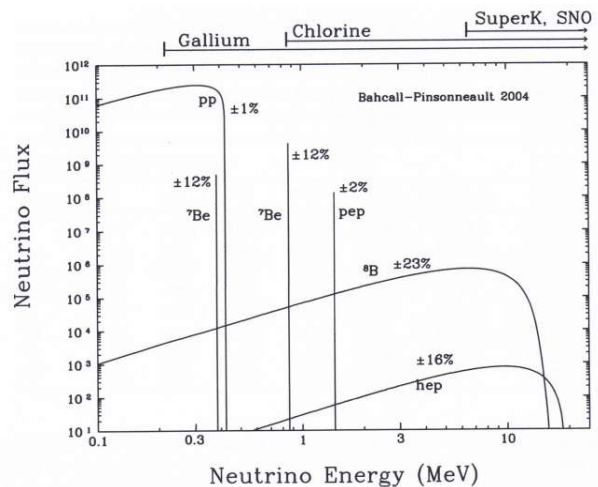
I neutrini sono di fondamentale importanza per lo studio dei processi che avvengono nel sole, come già illustrato nel paragrafo precedente. Per avere un'idea del numero di neutrini prodotti dal sole che giungono sulla terra su una superficie di 1 cm^2 . Il numero di neutrini prodotti al secondo dal sole é dato da

$$\mathcal{N}_{\nu} = 2 \frac{L_{\odot}}{Q} \sim 2 \cdot 10^{38} \text{ neutrini/sec} \quad (5.51)$$

Si deve quindi calcolare il flusso di neutrini, definito come

$$\Phi_{\nu} = \frac{1}{4\pi d^2} \frac{N_{\nu}}{\text{sec}} \simeq 7 \cdot 10^{10} \text{ neutrini/cm}^2 \cdot \text{sec} \quad (5.52)$$

dove d é la distanza terra-sole , $d = 1 \text{ U.A.} = 1,496 \cdot 10^{13} \text{ cm}$. La misura di questo flusso non é semplice : alla difficoltà di trovare un sito adatto per il rivelatore si aggiungono i tempi di attesa per verificare una reazione indotta dai neutrini. In figura é riportato lo spettro di neutrini e il tipo di rivelatore che é stato utilizzato per ricavare l'andamento sperimentale.

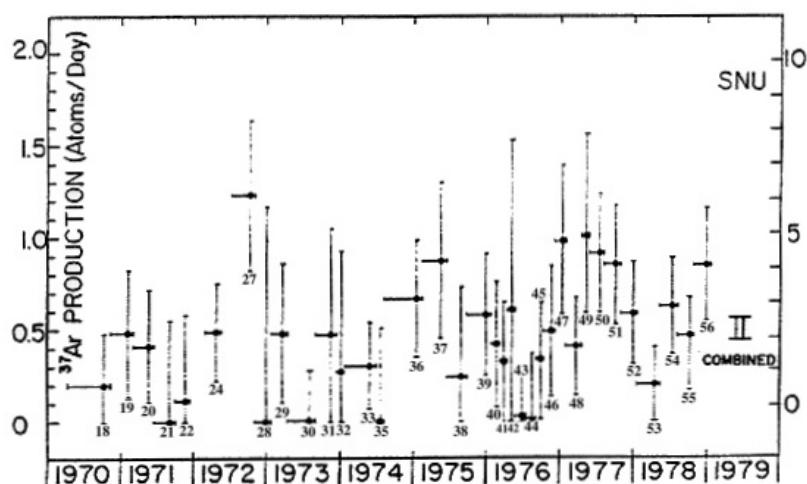


5.8.1 Rivelazione dei neutrini

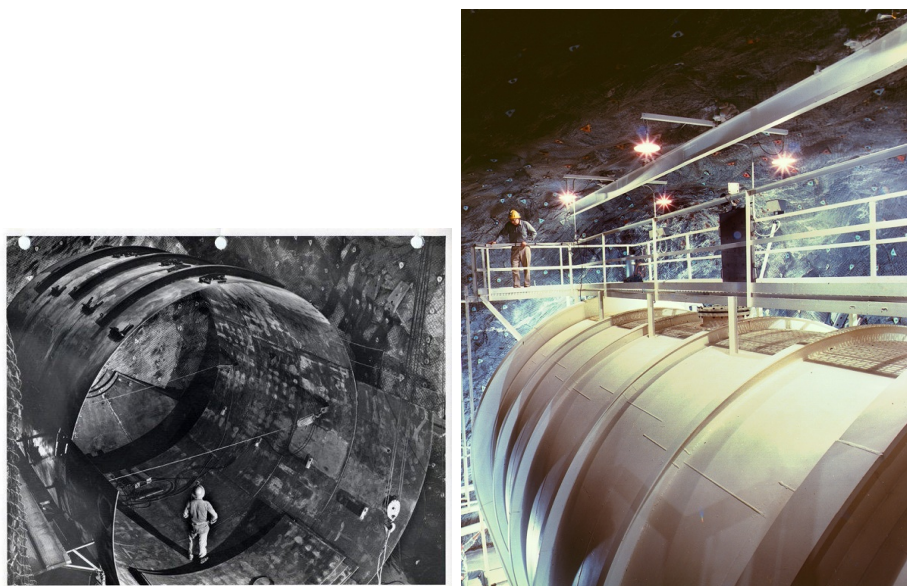
Homestake Uno dei primi esperimenti fu quello di *Homestake*(*Davis*) (1967). Il rivelatore utilizzato era al Cloro : C_2Cl_4 . Il processo che permetteva di visualizzare i neutrini era il seguente $\nu_e + {}^{37}_{17}\text{Cl} \rightarrow {}^{37}_{18}\text{Ar} + e^-$. Questo processo ha bisogno di neutrini abbastanza energetici con $E_\nu \geq 0,814 \text{ MeV}$. L'Argon prodotto decade (β) successivamente con $T_{1/2} = 35 \text{ days}$. I risultati vennero riproposti con una nuova unità di misura , definita da

$$1\text{SNU}(\text{Solar Neutrino Unit}) = \frac{1\text{neutrino catturato}}{10^{36}\text{nuclei bersaglio} \cdot \text{secondo}} \quad (5.53)$$

I risultati dell'esperimento sono riportati in figura.



mentre nelle figure seguenti vengono riportate alcune foto dell'attrezzatura utilizzata per le rivelazioni

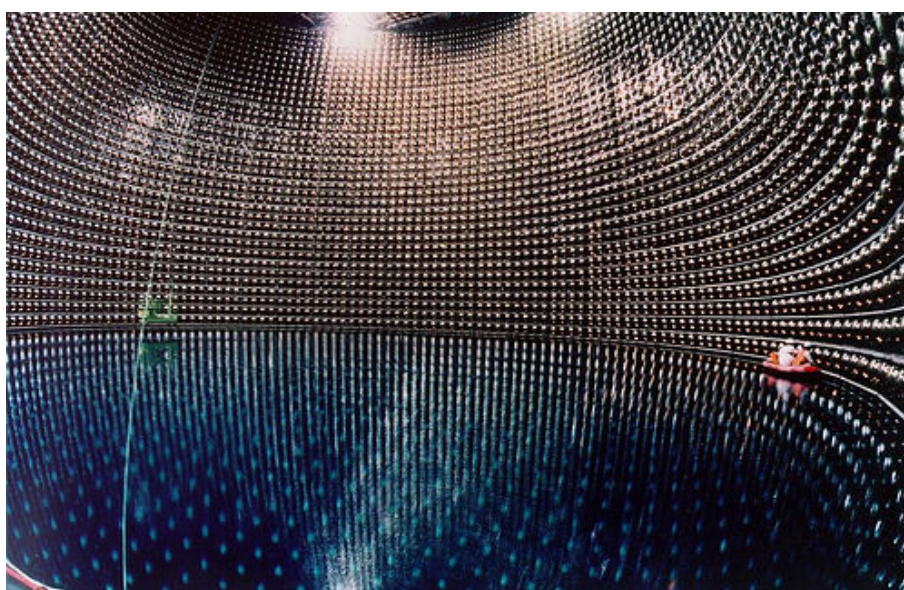


Il valore previsto era di 8 SNU mentre nel grafico vennero rivelati valori molto più bassi. In generale si ebbe che $\phi_{\nu_e}^{(\text{exp})} \simeq \frac{1}{3} \phi_{\nu_e}^{(\text{theo})}$. Inizialmente la discrepanza tra i valori sperimentali e quelli teorici suggerì che il modello solare potesse risultare da un'elaborazione errata dei processi solari. In realtà il modello venne confermato anche da esperimenti successivi, quindi la spiegazione doveva essere un'altra.

KamiokaNDE/SuperKamiokaNDE La dicitura sta ad indicare che l'esperimento viene condotto nella miniera di *Kamioka*, mentre NDE rappresenta il tipo di esperimento : *Nuclear Decay Experiment*. In questo si riesce a rivelare anche la direzione dei neutrini e il rivelatore è ad acqua. In effetti viene sfruttato lo scattering elettronico

$$\nu_e + e^- \rightarrow e^- + \nu_e \quad (5.54)$$

La vasca utilizzata, insieme al rivelatore, è ben visibile nella seguente foto.

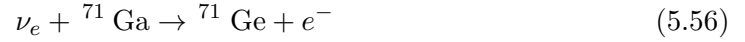


In questo particolare scattering l'elettrone si muove ad una velocità maggiore della luce nel mezzo⁸. Viene quindi prodotta radiazione, detta radiazione *Cerenkov*. L'angolo caratteristico della radiazione definisce il cono nel quale viene emessa la radiazione ed è dato da

$$\vartheta = \arccos\left(\frac{c/n}{v}\right) \quad (5.55)$$

L'apparato è sensibile anche ai neutrini appartenenti alle altre famiglie ν_μ, ν_τ . Anche in questo esperimento venne rivelata una discrepanza tra dati teorici e sperimentali: $\phi_\nu^{(\text{exp})} \simeq \frac{1}{2}\phi_\nu^{(\text{theo})}$.

Gallex/GNO Vengono utilizzati rivelatori al Gallio, che hanno bisogno di neutrini con $E_\nu \gg 233 \text{ KeV}$. La reazione utilizzata nel rivelatore è la seguente



SNO (Sudbury Neutrino Observatory) Viene utilizzato un rivelatore ad acqua pesante (D_2O).

5.9 Fasi finali dell'evoluzione stellare (cenni)

Una volta esaurito l'idrogeno nelle zone centrali della stella, dove la temperatura è abbastanza alta da permetterne la fusione in elio si giunge alla situazione seguente: un nucleo ricco di ${}^4\text{He}$ è rivestito da uno strato di idrogeno a temperatura minore. In questa configurazione non sono possibili nemmeno le reazioni di fusione dell'elio, quindi la stella, non avendo più fonte di energia, si raffredda e si contrae. L'energia associata al nucleo della stella è data da

$$E_G \sim -G \frac{m^2}{r} \quad (5.57)$$

Quando questo si contrae la variazione di energia è data da

$$\Delta E_G = G \frac{m^2}{r^2} \Delta r < 0 \quad (5.58)$$

a questa variazione è associato un aumento dell'energia interna. Infatti, per il teorema del viriale

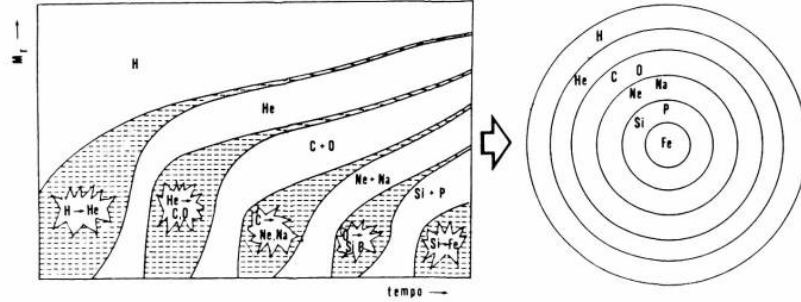
$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = -\frac{1}{2} \langle E_G \rangle \Rightarrow \Delta E_{\text{kin}} = -\frac{1}{2} \Delta E_G \quad (5.59)$$

dunque l'energia cinetica aumenta, quindi aumenta anche l'energia interna del sistema. In questa fase la stella si riscalda, quindi si ricreano le condizioni per la fusione dell'idrogeno in una corona sferica immediatamente adiacente alla sezione dove è presente l'elio. Se la temperatura aumenta ancora inizia a fondere anche l'elio con conseguente produzione del ${}^{12}\text{C}$. Dopo questa fase l'elio si esaurirà, il nucleo si raffredderà nuovamente e ricomincerà il ciclo di fusione con i prodotti di quello precedente. Ad ogni nuovo ciclo della stella i materiali utilizzati sono sempre più pesanti; il limite è costituito dal ferro che rappresenta l'elemento più legato in natura per il quale la fusione produce energia: gli elementi al limite⁹ sono ${}^{62}\text{Ni}$

⁸In un mezzo con indice di rifrazione n la luce ha velocità $c' = \frac{c}{n} < c$.

⁹Viene considerato solo l'isotopo ${}^{56}\text{Fe}$ in virtù della sua abbondanza: in realtà l'isotopo ${}^{58}\text{Fe}$ sarebbe più legato del precedente ma la sua scarsa abbondanza ($\sim 0,29\%$) fa sì che questo non venga considerato nella trattazione della fusione stellare.

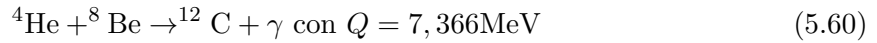
e ^{56}Fe . Man mano che il processo va avanti gli elementi piú pesanti si distribuiscono al centro della stella cosicché questa assume una configurazione a strati : andando verso l'esterno si trovano elementi sempre piú leggeri. Sorge spontanea la questione sul destino della stella quando questa non può piú sintetizzare elementi. In questo caso la stella non ha piú energia dunque il nucleo continua a contrarsi fino a che questa implode. In particolare solo le stelle con $M > 8M_{\odot}$ riescono ad arrivare fino alla sintesi del ferro, altre si arrestano prima.



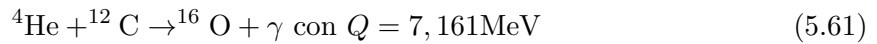
Si supponga ora che una stella riesca a sintetizzare tutti gli elementi fino al Carbonio. L'arresto del processo di sintesi é dovuto alla pressione di degenerazione degli elettroni che é in grado di sostenere la stella. Il limite di massa per cui la stella viene sostenuta dalla sola pressione di degenerazione é detta massa di *Chandrasekhar* : se la massa della stella é minore di questo valore allora é stabile , altrimenti collassa.

5.9.1 Fusione dell'elio

Il processo é dato da $^4\text{He} + ^4\text{He} \rightarrow ^8\text{Be}$ con $\tau = 7 \cdot 10^{-17}$ s. Prima che il Berillio decada spontaneamente c'è una probabilità non nulla che avvenga la reazione



Successivamente



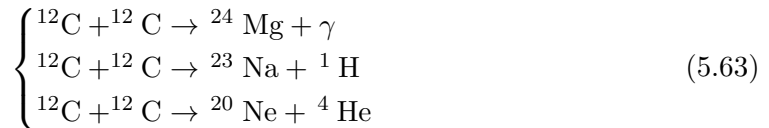
Si può continuare aggiungendo altre particelle α



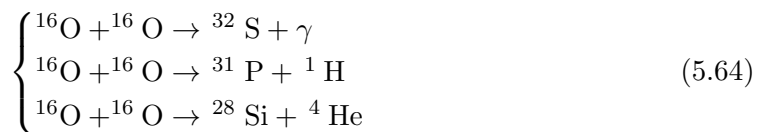
Quando la temperatura non é piú sufficiente per la fusione la reazione si arresterá.

5.9.2 Fusione del Carbonio e Ossigeno

- $T \sim 7 \cdot 10^8$ K



- $T \sim 10^9$ K



5.10 Gas di Fermi

L'argomento é stato sviluppato nel primo modulo quindi la descrizione sar  limitata all'approfondimento dei temi gi  trattati. Per il gas di fermi perfetto valgono le leggi

$$pV = n_M RT \quad R \equiv k_B \mathcal{N}_A \quad N = n_M \mathcal{N}_A \quad (5.65)$$

Si definisce con m_0 la massa di una particella , quindi

$$M = m_0 N \quad n = \frac{N}{V} \quad \rho = \frac{M}{V} = m_0 n \quad (5.66)$$

ove n indica la densit  numerica e ρ quella di massa. La pressione si scrive come

$$p = k_B n T = k \rho T \quad (5.67)$$

mentre l'energia

$$E = \frac{3}{2} n_M R T \Rightarrow p = \frac{2}{3} \varepsilon \quad (5.68)$$

dove ε   la densit  di energia per volume. Per il gas di Fermi non relativistico si ottengono le relazioni

$$n = \frac{\nu}{6\pi^2} k_F^3 \quad ; \quad \varepsilon = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{6\pi^2}{\nu} \right)^{2/3} n^{5/3} \quad ; \quad p = \frac{2}{5} \frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{6\pi^2}{\nu} \right)^{2/3} n^{5/3} \quad (5.69)$$

In questo caso la densit  di massa   pari a $\rho = m_0 n$. Nel caso di gas perfetto relativistico bisogna tener conto della massa a riposo , scrivendo l'energia della particella come

$$e(k) = \sqrt{(\hbar c k)^2 + (m_0 c^2)^2} \quad (5.70)$$

Si ricava quindi l'espressione dell'energia per il caso relativistico

$$E = \frac{\nu V}{(2\pi)^3} \int d^3 k e(k) \mathcal{F}(k) \quad (5.71)$$

dove

$$\mathcal{F}(k) = \begin{cases} 1, & 0 < k < k_F \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (5.72)$$

Si ottiene quindi

$$E = \frac{\nu V}{2\pi^2} \int dk \cdot k^2 \sqrt{(\hbar c k)^2 + (m_0 c^2)^2} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\nu}{2\pi^2} \int_0^{k_F} dk \cdot k^2 m_0 c^2 \sqrt{\left(\frac{\hbar k}{m_0 c} \right)^2 + 1} \quad (5.73)$$

Si definisce ora $\hbar k / m_0 c \equiv \lambda_c k \equiv y$ e $x \equiv \lambda_c k_F$ dove λ_c   la lunghezza d'onda Compton. Sostituendo si arriva all'espressione

$$\varepsilon = \frac{\nu}{2\pi^2} \frac{m_0^4 c^5}{\hbar^3} \int_0^x dy \cdot y^2 \sqrt{y^2 + 1} = \frac{\nu}{2\pi^2} \frac{m_0 c^2}{\lambda_c^3} \int_0^x dy \cdot y^2 \sqrt{y^2 + 1} \quad (5.74)$$

Svolgendo l'integrale , con semplici passaggi si arriva alla forma

$$\varepsilon = \frac{1}{8} \frac{\nu}{2\pi^2} \frac{m_0^4 c^5}{\hbar^3} \chi(x) \equiv \eta \chi(x) \quad (5.75)$$

ove

$$\chi(x) \equiv x(1+x^2)^{1/2}(1+2x^2) - \ln \left[x + (1+x^2)^{1/2} \right] \quad \eta \equiv \frac{1}{8} \frac{\nu}{2\pi^2} \frac{m_0^4 c^5}{\hbar^3} \quad (5.76)$$

Ricordandosi poi che $x \propto k_F \propto n^{1/3}$ si vede che c'è una relazione esponenziale tra la densità di energia e la densità di particelle. La pressione si ottiene calcolando

$$p = n \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} - \varepsilon \quad ; \quad p = - \frac{\partial E}{\partial V} \quad (5.77)$$

Utilizzando la (5.67) e la (5.73) si ottiene quindi

$$p = \frac{1}{3} \frac{\nu}{(2\pi)^3} \int d^3k \cdot \hbar k v \mathcal{F}(k) \quad (5.78)$$

Conoscendo l'impulso e l'energia delle particelle la velocità v è univocamente determinata dalle relazioni

$$\begin{cases} p_e = m_0 \gamma v \\ e = m_0 \gamma c^2 \end{cases} \Rightarrow v = \frac{p_e c}{e} = \frac{\hbar c k}{e(k)} c \quad (5.79)$$

Utilizzando la (5.70) e introducendo la variabile $y = \lambda_c k = \hbar k / m_0 c$ si ottiene¹⁰

$$p = \frac{1}{3} \frac{\nu}{2\pi} \frac{m_0^4 c^5}{\hbar^3} \int_0^x dy \frac{y^4}{\sqrt{y^2 + 1}} \equiv \eta \phi(x) \quad (5.80)$$

con

$$\phi(x) \equiv x(1+x^2)^{1/2} \left(\frac{2}{3} x^2 - 1 \right) + \ln \left[x + (1+x^2)^{1/2} \right] \quad (5.81)$$

Le equazioni (5.75) e (5.80) forniscono l'equazione di stato del sistema per il gas di fermi relativistico. Si può calcolare anche la densità del gas : a differenza del caso non relativistico qualsiasi forma di massa si manifesta in energia, quindi

$$\rho = \frac{1}{c^2} \varepsilon = \frac{\eta}{c^2} \chi(x) \quad (5.82)$$

Risulta utile considerare i limiti di questo sistema.

Limite ultrarelativistico Nel caso ultra relativistico $m_0 \rightarrow 0$ o , equivalentemente, $x \gg 1 \Rightarrow \hbar c k_F \gg m_0 c^2$. In questo limite la (5.70) si riduce a $\hbar c k$. Dunque $\varepsilon = \frac{\nu}{(4\pi)^3} \int d^3k \cdot \hbar c k \mathcal{F}(k) \sim k_F^4$. Utilizzando la relazione per la densità $n = \frac{\nu}{6\pi^2} k_F^3$ si ottiene

$$\varepsilon = \frac{3}{4} \left(\frac{6\pi^2}{\nu} \right)^{1/3} \hbar c n^{4/3} \quad (5.83)$$

La pressione si può ricavare con le usuali formule termodinamiche

$$p = n \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} - \varepsilon = \frac{1}{4} \left(\frac{6\pi^2}{\nu} \right)^{1/3} \hbar c n^{4/3} = \frac{1}{3} \varepsilon \quad (5.84)$$

¹⁰Il fattore η è equivalente a quello introdotto precedentemente, a meno di una costante moltiplicativa, influente ai fini della trattazione.

Limite non relativistico Il limite opposto é costituito dal caso non relativistico. Si ha quindi $x \ll 1 \Rightarrow \hbar c k_F \ll m_0 c^2$. Per la densità di energia, così come per la pressione, si può sviluppare in serie di Taylor rispetto ad x ottenendo

$$\chi(x) \simeq \frac{8}{3} \left(x^3 + \frac{3}{10} x^5 - \frac{3}{56} x^7 + \dots \right) \quad (5.85)$$

$$\phi(x) \simeq \frac{8}{15} \left(x^5 - \frac{5}{14} x^7 + \frac{5}{24} x^9 + \dots \right) \quad (5.86)$$

Arrestando lo sviluppo alla quinta potenza si ottiene

$$p = \eta \frac{8}{15} x^5 = \frac{2}{5} \frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{6\pi^2}{\nu} \right)^{2/3} n^{5/3} \quad (5.87)$$

$$\varepsilon = \eta \frac{8}{3} \left(x^3 + \frac{3}{10} x^5 \right) \equiv \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \quad (5.88)$$

dove si sono definiti

$$\varepsilon_0 \equiv \frac{\nu}{6\pi^2} k_F^3 m_0 c^2 = m_0 c^2 n \quad ; \quad \varepsilon_1 \equiv \eta \frac{8}{3} \frac{3}{10} x^5 = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{6\pi^2}{\nu} \right)^{2/3} n^{5/3} \quad (5.89)$$

Si noti che ε_0 rappresenta il contributo della massa a riposo alla densità di energia mentre ε_1 il contributo dell'energia interna.

5.11 Classificazione delle stelle

1. $M \leq 8M_\odot$: Nana Bianca
2. $8M_\odot \leq M \leq 25M_\odot$: Fe-core \Rightarrow Supernova \Rightarrow Stella di Neutroni
3. $M \gg 25M_\odot$: Fe-core \Rightarrow Buco Nero

Per il sole $M_\odot = 1,989 \cdot 10^{33}$ g , $R_\odot = 6,96 \cdot 10^5$ km $\Rightarrow \rho_\odot \simeq 1,4$ g/cm³.

Stella	Massa	R	ρ	R^{Scwh}/R
Sole	M_\odot	R_\odot	$\sim 1,4$ g/cm ³	$4 \cdot 10^{-6}$
Nana Bianca	$\leq 1,4M_\odot$	$10^{-2}R_\odot$	10^6 g/cm ³	$4 \cdot 10^{-4}$
Stella di Neutroni	$1 \div 2M_\odot$	~ 10 km	$5 \cdot 10^{14}$ g/cm ³	0,3

5.12 Equazione di stato per core stellare

Supponiamo innanzitutto che il materiale sia perfettamente ionizzato e che la temperatura di questo sia sufficientemente piccola da esser considerata nulla¹¹. La pressione si può scrivere come somma di due termini : $P = P_I + P_e \sim P_e$ visto che $P_I \ll P_e$, dove I rappresenta gli ioni e e gli elettroni. Prima di ricavare l'equazione di stato occorre sviluppare alcuni argomenti.

¹¹Ovviamente questa condizione deve essere rapportata con l'energia del livello di fermi : dovrà essere $kT \ll e_F$.

5.12.1 Limite per gas non relativistico sulla densità

La densità totale del sistema si trova considerando la densità di tutti i nuclei e degli elettroni. In realtà gli elettroni hanno una componente $\propto x^5$ che contribuisce alla densità ma, in questo caso, questo termine è trascurabile. La densità si può quindi calcolare come¹²

$$\rho = \langle m_A \rangle n_I \simeq \langle A \rangle m_H n_I \quad (5.90)$$

Ovviamente $n_e = \langle Z \rangle n_I$, quindi

$$\rho = \frac{\langle A \rangle}{\langle Z \rangle} m_H n_e \quad (5.91)$$

Si può definire $Y_e \equiv \frac{\langle Z \rangle}{\langle A \rangle}$ cosicché $\rho = \frac{m_H}{Y_e} n_e$. La densità numerica degli elettroni è nota dal modello del gas fermionico ($\nu = 2$):

$$n = \frac{1}{3\pi^2} k_F^3 \Rightarrow \rho = \frac{m_H}{Y_e} \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{m_e c}{\hbar} \right)^3 x^3 \quad (5.92)$$

Conoscendo la forma esplicita di ρ è possibile studiare i limiti $x \gg 1$ e $x \ll 1$ con facilità. Conviene partire dal caso in cui $x = 1$: si ponga per semplicità $Y_e = 0,5$. Si ha quindi¹³

$$\rho^* = \rho(x = 1) = \frac{1}{3\pi^2} \frac{m_H}{0,5} \left(\frac{m_e c}{\hbar} \right)^3 \simeq 1,102 \cdot 10^{-6} \text{ MeV}/c^2 \cdot \text{fm}^3 \simeq 2 \cdot 10^6 \text{ g/cm}^3 \quad (5.93)$$

Quindi per $\rho < \rho^*$ gli elettroni non sono relativistici, viceversa sono ultra relativistici. Nel caso del sole $\rho_\odot = 1,3 \cdot 10^2 \text{ g/cm}^3$ quindi gli elettroni non sono relativistici.

5.12.2 Condizione di gas ideale

La condizione da porre perché il gas possa considerarsi ideale è che il termine di interazione nell'energia sia piccolo rispetto all'energia di Fermi: $|V_{\text{Coul}}| \ll e_F$. Per ricavare questo limite esplicitamente si consideri innanzitutto il volume medio degli ioni, calcolabile come

$$v_I = \frac{V}{N_I} = \frac{1}{n_I} = \frac{4}{3} \pi r_0^3 \quad (5.94)$$

ove r_0 è il raggio medio del nucleo. La condizione di gas ideale si può quindi scrivere come

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r_0} \ll \frac{\hbar^2}{2m_e} k_F^2 \quad (5.95)$$

Si ha che $\frac{1}{n_I} = \frac{Z}{n_e} = \frac{4}{3} \pi r_0^3 \Rightarrow r_0 \sim \left(\frac{Z}{n_e} \right)^{1/3}$ Quindi sostituendo nella disuguaglianza si ottiene

$$\frac{Ze^2}{Z^{1/3} n_e^{1/3}} \ll \frac{\hbar^2}{m_e} n_e^{2/3} \Rightarrow n_e \gg Z^2 \left(\frac{m_e c^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2} \right)^3 = \frac{Z^2}{r_B^3} \quad (5.96)$$

La relazione finale per la densità si ricava calcolando

$$\rho \gg \frac{m_H}{r_B^3} AZ \simeq 11,3 \cdot Z A \text{ g/cm}^3 \quad (5.97)$$

Ad esempio per il Carbonio-12 il valore critico è di circa $8 \cdot 10^2 \text{ g/cm}^3$ mentre per il Ferro-56 la densità critica è di circa $1,65 \cdot 10^4 \text{ g/cm}^3$

¹²In questa approssimazione è stata trascurata l'energia di legame dei nucleoni presenti nel nucleo ($6 \div 7 \text{ MeV}$).

¹³Per l'ultima parte dell'uguaglianza si utilizza il fattore di conversione $1 \text{ MeV}/c^2 = 1,78266 \cdot 10^{-27} \text{ g}$; $1 \text{ MeV}/c^2/\text{fm}^3 = 1,78266 \cdot 10^{12} \text{ g/cm}^3$.

5.12.3 Correzioni elettrostatiche all'equazione di stato per un gas di fermi perfetto

Per il calcolo della correzione dovuta all'interazione elettrostatica si immagini di dividere il sistema in molte cellette (gli atomi del gas) : ognuna di queste risulta globalmente neutra. Questo tipo di schematizzazione é dovuta a *Wigner-Seitz* . La densità di carica é costante ed é data da

$$\rho_e = -\frac{Ze}{\frac{4}{3}\pi r_0^3} \quad (5.98)$$

Quindi l'energia di interazione elettrone-elettrone e ione-elettrone si calcola come

$$E_{ee} = \int_0^{r_0} \frac{q(r)}{r} dq = \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{r_0} \quad ; \quad E_{Ie} = \int_0^{r_0} \frac{Ze}{r} dq = -\frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{r_0} \quad (5.99)$$

L'energia totale si ottiene sommando

$$E_{\text{Coul}} = E_{ee} + E_{Ie} = -\frac{9}{10} \frac{Z^2 e^2}{r_0} = -\frac{9}{10} Z^2 e^2 \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} Z^{-1/3} n_e^{1/3} \quad (5.100)$$

Quindi l'energia media é data da

$$\frac{E_{\text{Coul}}}{Z} = -\frac{9}{10} Z^2 e^2 \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} Z^{2/3} n_e^{1/3} \quad (5.101)$$

Utilizzando le usuali relazioni termodinamiche é possibile trovare la pressione dovuta al termine di interazione Coulombiano.

$$p_{\text{Coul}} = n_e^2 \frac{d(E_{\text{Coul}}/Z)}{dn_e} = -\frac{3}{10} Z^2 e^2 \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} Z^{2/3} n_e^{1/3} \quad (5.102)$$

Sviluppiamo questo risultato nei limiti già considerati di elettroni ultrarelativistici e nonrelativistici.

Elettroni ultrarelativistici

$$p_0 = \frac{1}{4} (3\pi)^2 \hbar c n_e^{4/3} \quad (5.103)$$

Quindi la pressione totale é data da

$$p = p_0 + p_{\text{Coul}} = p_0 \left(1 + \frac{p_{\text{Coul}}}{p_0} \right) = p_0 \left[1 - \frac{2^{5/3}}{5} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} \alpha Z^{2/3} \right] \quad (5.104)$$

Ad esempio per ^{12}C , $Z = 6$, $p_{\text{Coul}}/p_0 \simeq 0,015 \simeq 1,51\%$ mentre per $Z = 26$ $p_{\text{Coul}}/p_0 \simeq 4\%$.

Elettroni nonrelativistici

$$p_0 = \frac{1}{5} \frac{\hbar^2}{m_e} (3\pi^2)^{2/3} n_e^{5/3} \Rightarrow p = p_0 \left(1 - \frac{Z^{2/3}}{2^{1/3} \pi r_B n_e^{1/3}} \right) \quad (5.105)$$

5.12.4 Equazioni Politropiche e di Lane-Emden

Dopo queste considerazioni é possibile scrivere il sistema che definisce implicitamente l'equazione di stato per il core stellare

$$\begin{cases} \frac{dp}{dr} = -G \frac{m(r)\rho(r)}{r^2} \\ \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \end{cases} \quad (5.106)$$

Questo sistema si risolve fissando un valore della densità centrale $\rho(r=0) \equiv \rho_c$ e integrando fino al raggio esterno. Le condizioni al contorno sono quindi date da

$$\begin{cases} \left(\frac{d\rho}{dr} \right)_{r=0} = 0 \\ \rho(R) = 0 \text{ per un certo } r = R \end{cases} \quad (5.107)$$

Elettroni nonrelativistici In questo caso $p \propto n_e^{5/3}$, quindi

$$n_e = \frac{Y_e}{m_H} \rho = \frac{1}{\mu_e m_H} \rho \text{ dove } \mu_e \equiv \frac{1}{Z} \quad (5.108)$$

Con queste sostituzioni la pressione diventa

$$p = \frac{1}{5} \frac{\hbar^2}{m_e^2} (3\pi^2)^{2/3} \frac{1}{\mu_e^{5/3} m_H^{5/3}} \rho^{5/3} \equiv K_{NR} \rho^{5/3} \quad (5.109)$$

Elettroni ultrarelativistici La pressione si scrive come

$$p = \frac{1}{4} (3\pi^2)^{1/3} \frac{\hbar c}{\mu_e^{4/3} m_H^{4/3}} \rho^{4/3} \quad (5.110)$$

In generale un'equazione di stato del tipo $p = K\rho^\gamma$ é detta equazione *politropica*, dove $\gamma = \frac{n+1}{n}$ ed n é detto indice politropico. Si può dimostrare le equazioni del sistema (5.106) possono essere combinate in una sola equazione. Infatti

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dr} = -G \frac{m(r)\rho(r)}{r^2} &\Rightarrow \frac{r^2}{\rho(r)} \frac{dp}{dr} = -Gm(r) \\ -G \frac{dm(r)}{dr} = \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho(r)} \frac{dp}{dr} \right) &= -G \cdot 4\pi r^2 \rho(r) \end{aligned} \quad (5.111)$$

Si ottiene quindi

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dp}{dr} \right) = -4\pi G \rho \quad (5.112)$$

Passando alle variabili adimensionali $r \equiv a\xi$, $\rho \equiv \rho_c \vartheta^n(\xi)$, dove $a^2 \equiv \frac{(n+1)K}{4\pi G} \rho_c^{\frac{1-n}{n}}$, si ottiene¹⁴ l'equazione di *Lane-Emden*

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\vartheta}{d\xi} \right) = -\vartheta^n(\xi) \quad (5.113)$$

Le soluzioni di questa equazione sono le funzioni di Lane-Emden $\vartheta_n(\xi)$: tali funzioni sono di vitale importanza in quanto il raggio stellare può essere espresso in funzione di queste.

¹⁴Si osservi che, con questa sostituzione, $p = p_c \vartheta^{n+1}(\xi)$.

5.13 Raggio stellare

Rappresenta il valore di r per il quale la densità della stella si annulla : $\rho(R) = 0 = \rho(a\xi_1) = \rho_c \vartheta^n(\xi_1) = 0$. Il primo zero delle funzioni ϑ_n rappresenta il punto in cui si annulla la densità , quindi definisce implicitamente la superficie del raggio stellare. Questo sarà quindi dato da $R \equiv a\xi_1$ dove ξ_1 è il primo zero delle ϑ_n . Visto che a è determinato dai parametri del problema si può ricavare un metodo di risoluzione utilizzato per il risolvere numericamente l'equazione è quello di *Runge-Kutta* .

$$R = a\xi_1 = \left[\frac{(n+1)k}{4\pi G} \right]^{1/2} \xi_1 \rho_c^{\frac{1-n}{2n}} \equiv B_n \rho_c^{\frac{1-n}{2n}} \quad (5.114)$$

Si noti che $R \propto \rho_c$.

5.14 Massa stellare

La massa della stella si può ottenere dall'equazione di stato , integrando la seconda equazione del sistema (5.106).

$$M = m(R) = m(a\xi_1) = 4\pi \int_0^R dr \cdot r^2 \rho(r) \quad (5.115)$$

Cambiando variabile si ottiene

$$M = 4\pi a^3 \rho_c \int_0^{\xi_1} \xi^2 \vartheta^n(\xi) d\xi = 4\pi a^3 \rho_c \left(-\xi^2 \frac{d\vartheta_n}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_1} \quad (5.116)$$

dove l'ultimo passaggio segue dalla (5.113). I valori delle costanti che compogono le equazioni di Lane-Emden sono facilmente calcolabili con metodi numerici: viene riportata una tabella con i valori delle costanti per alcuni ordini¹⁵.

TABLE 4
THE CONSTANTS OF THE LANE-EMDEN FUNCTIONS*

n	ξ_1	$-\xi_1^2 \left(\frac{d\vartheta_n}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_1}$	$\rho_c / \bar{\rho}$	$\omega_n = -\xi_1^{n+1} \left(\frac{d\vartheta_n}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_1}$	N_n	W_n	$\frac{1}{(n+1)\xi_1 \left(\frac{d\vartheta_n}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_1}}$
0.....	2.4494	4.8988	1.0000	0.33333	0.119366	0.5
0.5.....	2.7528	3.7871	1.8361	0.02156	2.270	0.26227	0.53847
1.0.....	3.14159	3.14159	3.28987	0.63662	0.392699	0.5
1.5.....	3.65375	2.71406	5.99071	132.3843	0.42422	0.770140	0.53849
2.0.....	4.35287	2.41105	11.40254	10.4950	0.36475	1.63818	0.60180
2.5.....	5.35528	2.18720	23.40640	3.82662	0.35150	3.90906	0.69956
3.0.....	6.89685	2.01824	54.1825	2.01824	0.36394	11.05066	0.85432
3.25.....	8.01894	1.94980	88.153	1.54716	0.37898	20.365	0.96769
3.5.....	9.53581	1.89056	152.884	1.20426	0.40104	40.9098	1.12087
4.0.....	14.97155	1.79723	622.408	0.729202	0.47720	247.558	1.66606
4.5.....	31.83646	1.73780	6189.47	0.394356	0.65798	4922.125	3.33100
4.9.....	169.47	1.7355	934800	0.14239	1.340	3.693×10^6	16.550
5.0.....	∞	1.73205	∞	0	∞	∞	∞

*The values for $n = 0.5$ and 4.9 are computed from Emden's integrations of θ_n ; for $n = 3.25$ an unpublished integration by Chandrasekhar has been used. $n = 5$ corresponds to the Schuster-Emden integral. For the other values of n the *British Association Tables*, Vol. II, has been used.

Sostituendo il valore di a , già ricavato in precedenza, nell'equazione (5.116) e utilizzando la (5.114) si ottiene infine

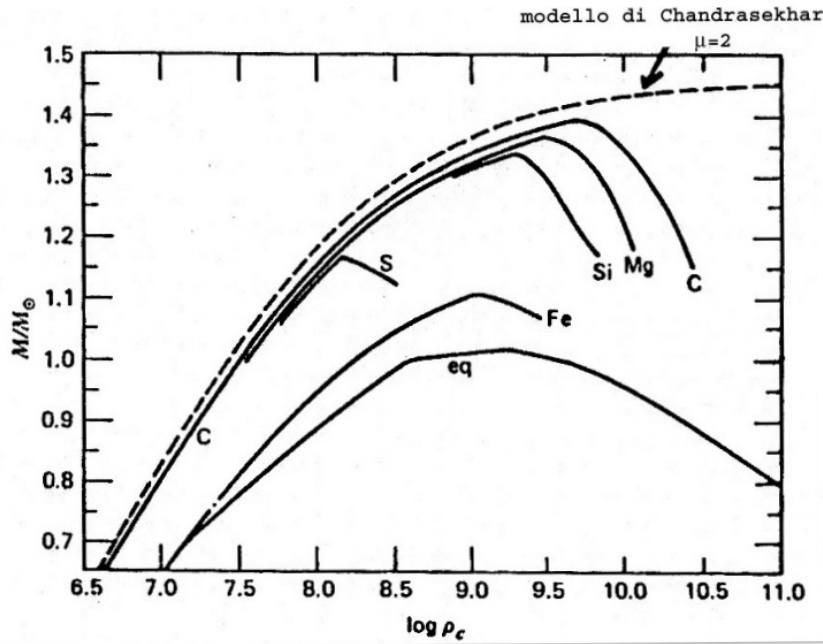
$$M = 4\pi \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{3/2} \rho_c^{\frac{3-n}{2n}} \left(-\xi^2 \frac{d\vartheta_n}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_1} \equiv A_n \rho_c^{\frac{3-n}{2n}} = \frac{A_n}{B_n^{\frac{3-n}{1-n}}} R^{\frac{3-n}{1-n}} \quad (5.117)$$

¹⁵Una trattazione accurata viene data nella appendice C

Si considerino ora alcuni casi particolari. Se $n = 3/2 \Rightarrow \gamma = 5/3$: in questo caso la massa assume la dipendenza $M_{3/2} \propto R^{-3}$. Nel caso, invece, di $n = 3 \Rightarrow \gamma = 4/3$ la massa diventa indipendente dal valore della densità centrale (quindi dal raggio): $M_3(R) = \text{costante}$. Dato che si può passare da un caso all'altro dobbiamo poter combinare i due andamenti : visto che ρ cresce al diminuire del raggio , andando a regimi ultrarelativistici, é ovvio pensare che $M_3(R)$ sia valida per $R \rightarrow 0$ e viceversa $M_{3/2}(R)$ per R grandi. Quindi la massa non crescerá sempre ma avrá un valore limite definito da

$$M_{\text{Ch}} = A_3 = 4\pi \left[\frac{4K}{4\pi G} \right]^{3/2} \left(-\xi^2 \frac{d\vartheta_3}{d\xi} \right)_{\xi_1} \simeq \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2} \frac{1}{m_H^2} \frac{1}{\mu_e^2} \simeq \frac{5,8 \cdot M_\odot}{\mu_e^2} \quad (5.118)$$

Per il ^{12}C il valore $\mu_e = 2$, quindi $M_{\text{Ch}} = 1,45 \cdot M_\odot$. La massa limite per la nana bianca appena calcolata rappresenta una schematizzazione molto semplice che non tiene conto delle interazioni elettrostatiche calcolate nel capitolo 5.12.3. Visto che p_{Coul} é negativa le correzioni elettrostatiche diminuiscono il valore della massa limite : maggiore é Z e minore sará la massa limite a cui il rapporto M/M_\odot tende al variare della densità centrale. L'andamento descritto é ben visibile nel seguente grafico.



Capitolo 6

Decadimento β

Negli anni successivi alla scoperta della radioattività fu osservato un diverso comportamento delle particelle emesse dalle sostanze radioattive durante il decadimento. In molti casi gli strumenti di rivelazione mostravano la presenza di tracce simili a scie: quando era applicato un campo magnetico, le tracce provenienti da alcune sostanze radioattive avevano la curvatura rivolta verso un lato, altre avevano una curvatura rivolta nel verso opposto alle prime. Ai raggi associati alle tracce deviate da una parte fu convenzionalmente dato il nome di raggi alfa, a quelli con tracce deviate dalla parte opposta quello di raggi beta e ai rimanenti, il nome di raggi gamma. La scia emessa nel caso dei raggi beta è dovuta al fatto che viene emesso un elettrone nel corso del decadimento beta. Il motivo per cui i tre tipi di raggi sono deviati in modo diverso dipende dalla diversa carica elettrica che hanno le particelle emesse: positive (se si tratta di particelle alfa) nel caso decadimento alfa, negative (elettroni) nel caso del decadimento beta e neutro (se si tratta di fotoni) nel caso del decadimento gamma. Inizialmente i decadimenti β risultarono decadimenti anomali visto che non veniva rispettata né la conservazione del momento angolare né la conservazione dell'energia: non era stato ancora scoperto il neutrino. Con l'introduzione di questa nuova particella da parte di Pauli si riuscì a rispondere a tutti gli interrogativi posti: il neutrino ha quindi $q_\nu = 0, m_\nu = 0, s_\nu = 1/2$. I tipi di decadimento β sono dai da

Decadimento β^- : ${}_Z^AX_N \rightarrow {}_{Z+1}X'_{N-1} + e^- + \bar{\nu}_e$

Decadimento β^+ : ${}_Z^AX_N \rightarrow {}_{Z-1}X'_{N+1} + e^+ + \nu_e$

Cattura Elettronica(ϵ) : $e^- + {}_Z^AX_N \rightarrow {}_{Z-1}X'_{N+1} + \nu_e$ Infatti dopo la cattura elettronica di un elettrone il nucleo X' si troverà in uno stato eccitato e quindi decadrà, emettendo un'energia pari alla binding energy dell'elettrone.

6.1 Q-rate

Per scrivere il Q-rate di questa reazione si analizzi innanzitutto il decadimento del neutrone libero

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad \text{con } Q = (m_n - m_p - m_e - m_\nu)c^2 \quad (6.1)$$

Ovviamente il Q si può scrivere anche come somma delle energie cinetiche dei prodotti : $Q = T_p + T_e + T_\nu$. Stimando questa quantità si osserva che $T_p \sim 0,3 \text{ KeV}$ quindi è trascurabile nella somma, pertanto $Q \simeq T_e + T_\nu \equiv T_{e_{\max}} \equiv Q_0$ Sperimentalmente si misura $Q_0^{\text{exp}} =$

($0,782 \pm 0,013$) MeV ; utilizzando questo valore si può ricavare un limite superiore alla massa a riposo del neutrino

$$Q = c^2(m_n - m_p - m_e) - m_\nu c^2 = Q_0^{\text{exp}} - m_\nu c^2$$

Si assuma per il momento $m_\nu = 0$ visto che risulta molto piccola. I Q di reazione si possono facilmente calcolare nei tre casi

Decadimento β^- Si ha

$$Q_{\beta^-} = M(Z, A) - M(Z + 1, A) - m_e \quad (6.2)$$

dove

$$\begin{cases} m(Z, A) = M(Z, A) + Zm_e - B_e(Z, A) \\ m(Z + 1, A) = M(Z + 1, A) + (Z + 1)m_e - B_e(Z + 1, A) \end{cases} \quad (6.3)$$

Facendo la differenza di queste ultime due equazioni e sostituendo in (6.2) si ottiene

$$Q_{\beta^-} = m(Z, A) - m(Z + 1, A) \quad (6.4)$$

infatti la differenza delle due binding energy può essere trascurata¹ visto che è nell'ordine dell'energia di legame dell'elettrone esterno (~ 10 eV).

Decadimento β^+

$$Q_{\beta^+} = m(Z, A) - m(Z - 1, A) - 2m_e \quad (6.5)$$

Si noti la differenza tra i due decadimenti β^- e β^+ : il secondo può avvenire SOLO quando la differenza delle due masse è superiore a due volte la massa a riposo dell'elettrone.

Cattura Elettronica

$$Q_\varepsilon = m(Z, A) - m(Z - 1, A) - b_e \quad (6.6)$$

6.2 Teoria di Fermi del decadimento β

Si supponga che il sistema nel caso del decadimento β sia descrivibile tramite due Hamiltoniane : l'Hamiltoniana iniziale H_0 e l'Hamiltoniana finale, dopo il decadimento , H' . Utilizzando la teoria delle perturbazioni si può calcolare la probabilità di passare dallo stato dell'Hamiltoniana iniziale a quello dell'Hamiltoniana finale. La probabilità è data da

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \psi_f | H' | \psi_i \rangle|^2 \rho(E_f) \quad (6.7)$$

questa analisi va sotto il nome di Regola d'oro di Fermi. La funzione ψ_i è associata al nucleo iniziale, è autofunzione, e sarà identificata dalla terna $|\psi_i\rangle = |J_i, m_i, \alpha_i\rangle$. Lo stato finale ψ_f , senza considerare l'interazione tra le particelle, si può scrivere come

$$|\psi_f\rangle = |\Psi_f\rangle |\phi_e\rangle |\phi_\nu\rangle \quad (6.8)$$

dove le funzioni d'onda rappresentano , rispettivamente, lo stato del nucleo , dell'elettrone e del neutrino. La $\rho(E_f)$ rappresenta la densità di stati , ovvero il numero degli stati compresi tra l'energia E_f e $E_f + dE_f$, ovvero

$$\rho(E_f) = \frac{dn}{dE_f}$$

¹I Q dei decadimenti β sono , generalmente, nell'ordine del MeV.

. Per la funzione d'onda del neutrino si può prendere un'onda piana, normalizzando su un volume V .

$$\langle \vec{r}_\nu | \phi_\nu \rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}_\nu \cdot \vec{r}_\nu} \quad (6.9)$$

Per l'elettrone si supponga che questo sia, in prima approssimazione, libero in modo che la funzione d'onda si riduce nuovamente a

$$\langle \vec{r}_e | \phi_e \rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}_e \cdot \vec{r}_e} \quad (6.10)$$

Gli elementi di matrice si calcolano come

$$\langle \psi_f | H' | \psi_i \rangle = \frac{1}{V} \int e^{-i\vec{k}_e \cdot \vec{r}_e} e^{-i\vec{k}_\nu \cdot \vec{r}_\nu} \Psi_f^*(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) H' \psi_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) d^3 r_e d^3 r_\nu d^3 r_1 \dots d^3 r_A \quad (6.11)$$

Fermi ipotizzò che l'interazione fosse a raggio zero e che il neutrone si trasformasse, dentro al nucleo, in $p + e^- + \bar{\nu}_e$. Questa interazione si può scrivere come

$$H' = g O'_x \delta^3(\vec{r}_e - \vec{r}_i) \delta^3(\vec{r}_\nu - \vec{r}_i)$$

con g una costante che tiene conto delle dimensioni. L'operatore O'_x è l'operatore che trasforma neutrone in protone, quindi sarà proporzionale all'operatore di salita dell'isospin. Le δ invece tengono conto che l'interazione è a cortissimo range. Con queste ipotesi l'integrale è ulteriormente semplificabile :

$$\begin{aligned} \langle \psi_f | H' | \psi_i \rangle &= \frac{1}{V} \int e^{-i\vec{k}_e \cdot \vec{r}_e} e^{-i\vec{k}_\nu \cdot \vec{r}_\nu} \Psi_f^*(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) H' \psi_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) d^3 r_e d^3 r_\nu d^3 r_1 \dots d^3 r_A \\ &= \frac{g}{V} \int e^{-i\vec{k}_e \cdot \vec{r}_e} e^{-i\vec{k}_\nu \cdot \vec{r}_\nu} \Psi_f^*(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) O'_x \delta^3(\vec{r}_e - \vec{r}_i) \delta^3(\vec{r}_\nu - \vec{r}_i) \psi_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) d^3 r_e d^3 r_\nu d^3 r_1 \dots d^3 r_A \\ &= \frac{g}{V} \int e^{-i\vec{k}_e \cdot \vec{r}_i} e^{-i\vec{k}_\nu \cdot \vec{r}_i} \Psi_f^*(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) O'_x \psi_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) d^3 r_1 \dots d^3 r_A \end{aligned} \quad (6.12)$$

Per semplificare ulteriormente si cerca di stimare i valori tipici di impulso per le particelle. Si supponga che $T_e = 1$ MeV; si può stimare il k_e dalle relazioni

$$E_e = \sqrt{(p_e c)^2 + (m_e c^2)^2} \Rightarrow E_e = T_e + m_e c^2 \Rightarrow p_e c \simeq 1,4 \text{ MeV} \Rightarrow k_e = \frac{p_e}{\hbar} = \frac{p_e c}{\hbar c} \simeq 0,7 \cdot 10^{-2} \text{ fm}^{-1} \quad (6.13)$$

Si noti che, nell'argomento dei due esponenziali della funzione integranda, $r_i \rightarrow \infty$ nell'integrazione : in realtà però la ψ_i è identicamente nulla fuori dal nucleo, ovvero per valori di $r_i > R$ (R è il raggio nucleare), quindi l'integrale è non nullo solo per i valori

$$|\vec{k}_e - \vec{r}_i| \leq k_e r_i \leq k_e R \sim 7 \cdot 10^{-3} \text{ fm} \cdot R \sim 0,01 \div 0,03 \ll 1$$

Quindi i due esponenziali si possono approssimare come

$$e^{-i\vec{k}_e \cdot \vec{r}_i} \simeq 1 \simeq e^{-i\vec{k}_\nu \cdot \vec{r}_i} \quad (6.14)$$

L'approssimazione (6.14) è detta delle Transizioni permesse². Utilizzando la (6.14) nell'integrale (6.12) si ottiene infine

$$\langle \psi_f | H' | \psi_i \rangle = \frac{g}{V} \int \Psi_f^*(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) O'_x \psi_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) d^3 r_1 \dots d^3 r_A \quad (6.15)$$

²Si osservi che tale approssimazione è giustificabile anche in virtù dello sviluppo in serie. Infatti

$$e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell (2\ell+1) j_\ell(kr) P_\ell(\cos \vartheta)$$

Questa quantità rappresenta semplicemente gli elementi di matrice dell'operatore O'_x quindi si può scrivere come

$$\langle \psi_f | H' | \psi_i \rangle = \frac{g}{V} \langle \Psi_f | O'_x | \psi_i \rangle = \frac{g}{V} M_{Fi} \quad (6.16)$$

Convienne ora concentrarsi sulla densità degli stati $\rho(E_f)$, avendo già semplificato il termine matriciale della (6.7).

6.2.1 Spettro energetico degli elettroni

Si indichi con dn_e la densità numerica di elettroni : é già stata ricavata la formula

$$dn_e = \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi k_e^2 dk_e = \frac{V}{h^3} 4\pi p_e^2 dp_e \quad (6.17)$$

Analogamente per i neutrini

$$dn_\nu = \frac{V}{h^3} 4\pi p_\nu^2 dp_\nu \quad (6.18)$$

Quindi il numero di elettroni e di neutrini si può ottenere come

$$dn_e dn_\nu = \frac{V^2}{h^6} (4\pi)^2 p_\nu^2 dp_\nu p_e^2 dp_e \quad (6.19)$$

La probabilità di transizione tra i due stati si può quindi scrivere come

$$dW = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \psi_f | H' | \psi_i \rangle|^2 \frac{dn_e dn_\nu}{dE_f} \quad (6.20)$$

Utilizzando l'approssimazione delle transizioni permesse

$$dW = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{g^2}{V^2} M_{Fi}^2 \frac{V^2}{h^6} (4\pi)^2 \frac{p_e^2 dp_e p_\nu^2 dp_\nu}{dE_f} \quad (6.21)$$

L'energia finale é data da $E_f = E_e + p_\nu c$, avendo considerato $m_\nu = 0$. Se si immagina di fissare un valore di E_e , si ricava

$$\frac{dp_\nu}{dE_f} = \frac{1}{c}$$

quindi si può sostituire nella (6.21), ottenendo

$$dW = \frac{64\pi^4}{ch^7} g^2 M_{Fi}^2 p_e^2 dp_e p_\nu^2 \equiv C p_e^2 dp_e p_\nu^2 \quad (6.22)$$

Dunque la funzione di distribuzione per l'impulso si può scrivere utilizzando la forma di W e le relazioni

$$\begin{cases} N_e(p_e) dp_e = C p_e^2 p_\nu dp_e \\ Q = T_e + T_\nu = T_e + p_\nu c \end{cases} \Rightarrow p_\nu c = Q - T_e \Rightarrow p_\nu = \frac{1}{c}(Q - T_e) \quad (6.23)$$

Quindi

$$N_e(p_e) = \frac{C}{c^2} p_e^2 (Q - T_e)^2 \quad (6.24)$$

che, per $\ell = 0$ si riduce a

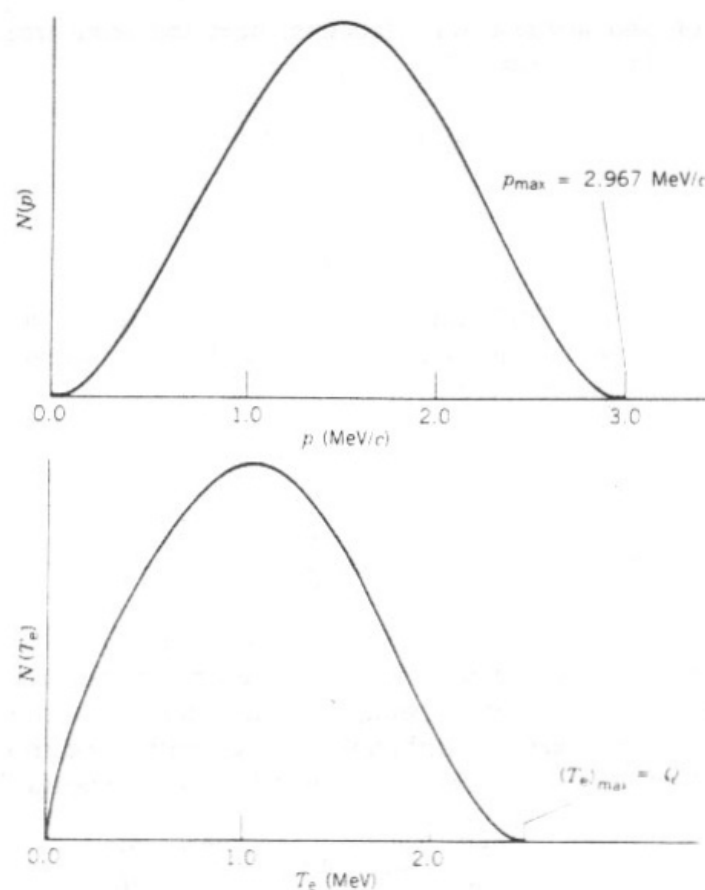
$$e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = j_0(kr) = \frac{\sin kr}{kr} \rightarrow 1$$

L'energia cinetica per elettrone é della forma $T_e = \sqrt{(p_e c)^2 + (m_e c^2)^2} - m_e c^2$, che si può sostituire nella (6.24) per avere la forma completa della distribuzione.

$$N_e(p_e) = \frac{C}{c^2} p_e^2 \left(Q - \sqrt{(p_e c)^2 + (m_e c^2)^2} - m_e c^2 \right)^2 \quad (6.25)$$

La figura seguente mostra l'andamento dello spettro per la (6.25) e per lo spettro dell'energia cinetica, ottenuto dalla (6.25) con un cambio di variabili.

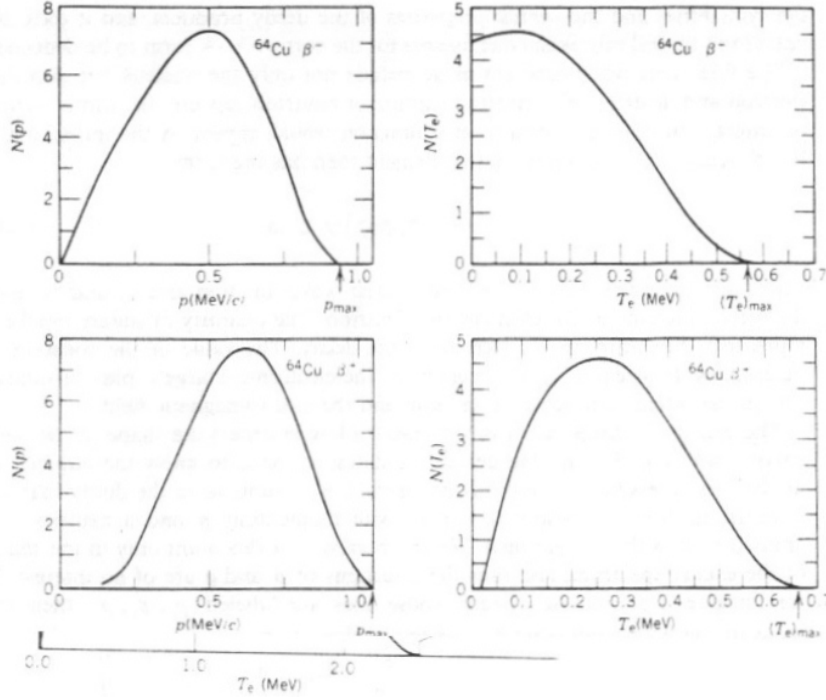
$$N_e(T_e) = \frac{C}{c^5} (T_e^2 + 2m_e c^2 T_e)^{1/2} (Q - T_e)^2 (T_e + m_e c^2) \quad (6.26)$$



Sperimentalmente si osservano alcuni discostamenti da quanto visto teoricamente. Ad esempio per il nucleo ${}^{64}_{29}\text{Cu}_{35}$ esistono i due decadimenti



Gli spettri dei due decadimenti sono shiftati, come si vede dall'immagine seguente.



Questo effetto é dovuto alle interazioni elettrostatiche che modificano l'Hamiltoniana : in particolare la funzione d'onda non é piú approssimabile con un'onda piana. Per risolvere questo problema Fermi introdusse un fattore adimensionale che tenesse conto delle interazioni elettrostatiche : $F(Z', p_e)$ é detta funzione di Fermi e si può esprimere in forma approssimata come

$$F = \frac{x}{1 - e^{-x}} \text{ dove } x \equiv \pm \frac{2\pi\alpha Z'}{v_e/c} \quad (6.29)$$

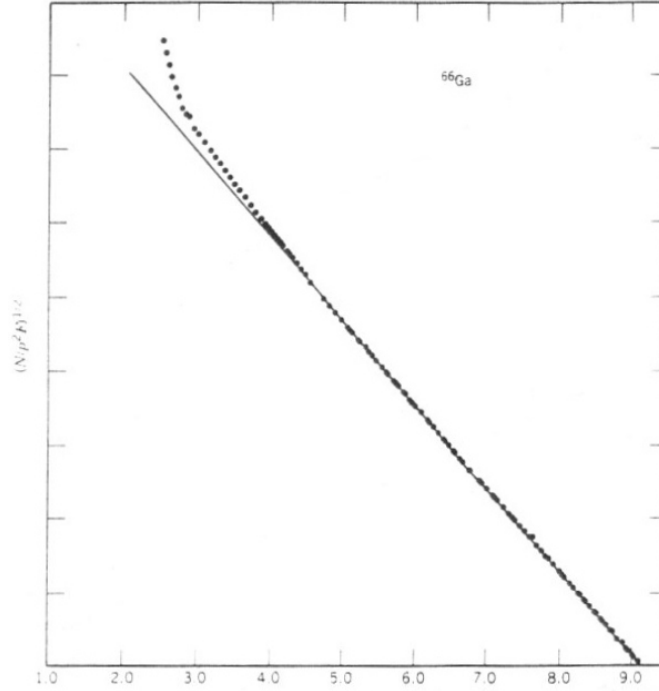
dove il segno + é per il decadimento β^- e viceversa. Aggiungendo questa correzione la densità della (6.24) diventa

$$N_e(p_e) = \frac{C}{c^2} p_e^2 (Q - T_e)^2 F(Z', p_e) \quad (6.30)$$

Per avere un riscontro con i dati sperimentali conviene prima trasformare questa formula , linearizzando l'andamento (plot di *Kurie*).

$$\sqrt{\frac{N_e(p_e)}{p_e^2 F(Z', p_e)}} = \frac{\sqrt{C}}{c} (Q - T_e) \quad (6.31)$$

Sperimentalmente si verifica che l'andamento previsto é rispettato , a meno di scattering a basse energie.



6.2.2 Vita media

Si vuole ora trovare una relazione per la vita media.

$$dW = \frac{1}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} g^2 |M_{Fi}|^2 F(Z', p_e) p_e^2 (Q - T_e)^2 dp_e \quad (6.32)$$

Integrando su tutti gli impulsi permessi si ha

$$W = \int dW = \frac{g^2 |M_{Fi}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} \int_0^{p_e^{\max}} F(Z', p_e) p_e^2 (Q - T_e)^2 dp_e \quad (6.33)$$

Per risolvere l'integrale conviene prima definire una quantità adimensionale data da³

$$\mathcal{F}(Z', p_e^{\max}) = \frac{1}{(m_e c)^3 (m_e c^2)^2} \int_0^{p_e^{\max}} F(Z', p_e) p_e^2 (Q - T_e)^2 dp_e \quad (6.34)$$

Definendo $E_0 \equiv E_e^{\max}$ si ottiene l'espressione finale per la probabilità di transizione

$$W = \frac{m_e^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7} g^2 |M_{Fi}|^2 \mathcal{F}(Z', E_0) = \frac{1}{\tau} = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} \quad (6.35)$$

Si definisce una vita media comparativa data da

$$\mathcal{F}(Z', E_0) t_{1/2} = \ln 2 \frac{2\pi^3 \hbar^7}{m_e^5 c^4} \frac{1}{g^2 |M_{Fi}|^2} \quad (6.36)$$

Dopo aver dato questa definizione si possono dividere i decadimenti in alcune classi : in particolare le transizioni con $\log \mathcal{F}t = 3 \div 4$ s sono dette *super-permesse*. Dai risultati sperimentali é possibile ricavare $g \simeq 0,88 \cdot 10^{-4} \text{ MeV} \cdot \text{fm}^3$ e quindi $G = \frac{m^2 c}{\hbar^3} g \simeq 10^{-5}$ nel caso di interazione nucleone-nucleon , molto piccolo se confronto , ad esempio, con g_π^2 dell'interazione forte pione-nucleone (~ 1) o anche con l'interazione elettromagnetica tra due protoni ($\sim 10^{-2}$).

³La quantità $\frac{1}{(m_e c)^3 (m_e c^2)^2}$ é stata aggiunta per mantenere l'adimensionalità .

6.2.3 Limite per massa nulla del neutrino

Se si toglie l'ipotesi $m_\nu = 0$ si può fare una stima dell'upper limit per la massa del neutrino. È già stato visto che

$$dW \sim p_e^2 dp_e p_\nu \frac{dp_\nu}{dE_f}$$

Per buona parte dello spettro, se siamo nella condizione $m_\nu c^2 \ll Q$, si ha che l'energia del neutrino è molto maggiore di $m_\nu c^2$: in queste zone quindi è una buona approssimazione quella ultra relativistica, per la quale $E_\nu \simeq p_\nu c$. Nella zona vicina all'*end point*, cioè dove $E_\nu \rightarrow 0$ e quindi $E_\nu \sim m_\nu c^2$, l'energia cinetica del neutrino diventa piccola. In questo limite ($p_e \rightarrow p_e^{\max}$) il neutrino si può quindi considerare non relativistico: l'energia si può quindi approssimare come

$$E_\nu = \frac{p_\nu^2}{2m_\nu} + m_\nu c^2$$

L'energia totale è data da $E_f = E_\nu + E_e \Rightarrow \frac{dp_\nu}{dE_f} = \frac{m_\nu}{p_\nu} \Rightarrow dW \sim p_e^2 p_\nu^2 \frac{1}{p_\nu} dp_e$. Si ottiene poi

$$\begin{cases} Q = T_e + T_\nu = T_e + \frac{p_\nu^2}{2m_\nu} \\ p_\nu = \sqrt{2m_\nu}(Q - T_e)^{1/2} \end{cases} \Rightarrow N_e(p_e) \sim p_e^2 (Q - T_e)^{1/2} \quad (6.37)$$

La differenza sostanziale tra il caso di massa non trascurabile e il suo opposto si nota se si computano i limiti

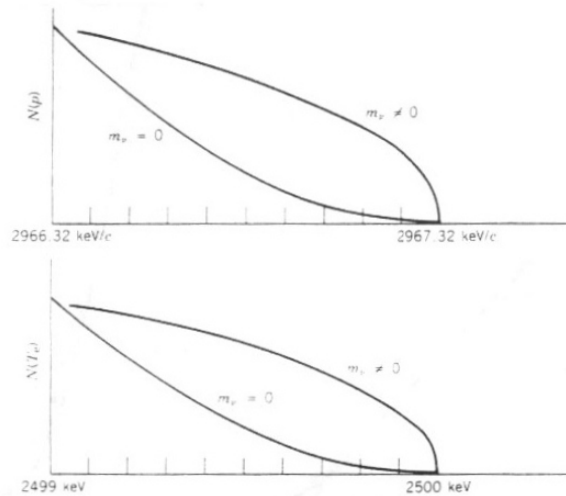
- $m_\nu = 0$

$$\lim_{p_e \rightarrow p_e^{\max}} \frac{dN_e(p_e)}{dp_e} = 0$$

- $m_\nu \neq 0$

$$\lim_{p_e \rightarrow p_e^{\max}} \frac{dN_e(p_e)}{dp_e} = -\infty$$

Sfruttando questa proprietà si può ricavare sperimentalmente un upper limit per la massa del neutrino. La situazione è ben riportata graficamente nella figura seguente



6.3 Regole di selezione

È già stata analizzata la regola di selezione per le transizioni permesse : si richiedeva che la funzione d'onda fosse approssimabile con

$$\phi_e(r) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}_e \cdot \vec{r}} \simeq 1 \quad (\ell = 0)$$

Transizioni Permesse Avendo $\ell = 0$, dalla conservazione del momento angolare totale , si ha che $\vec{I}_i = \vec{I}_f + \vec{S}$, dove $\vec{S} = \vec{s}_e + \vec{s}_\nu$. A seconda del valore di S le transizioni permesse vengono divise in varie classi.

- $S = 0$. **Transizioni di Fermi** : Per queste $I_i = I_f$, $\Pi_i = \Pi_f$. Sono transizioni del tipo $0^+ \rightarrow 0^+$.
- $S = 1$. **Transizioni di Gamow-Teller** : Per queste $I_i = I_f + 1, \dots, |I_f - 1| \Rightarrow \Delta I = |I_f - I_i| = 0, 1$ e $\Pi_i = \Pi_f$. In questo caso la transizione $0^+ \rightarrow 0^+$ non può esserci perché si dovrebbe accoppiare un momento angolare 0 con spin 1. Appartiene a questo tipo la reazione $\text{He} \rightarrow {}^6\text{Li} + e^- + \bar{\nu}_e$ che è di tipo $0^+ \rightarrow 1^+$

Transizioni Proibite Questi decadimenti non sono proibiti , ma sono meno probabili delle transizioni permesse. Si incontrano frequentemente quando lo stato iniziale e finale hanno parità opposte , e quindi quando è violata la regola per le transizioni permesse. Per soddisfare il cambio di parità , l'elettrone ed il neutrino dovranno essere emessi con un valore di ℓ (momento angolare rispetto al nucleo) dispari. Ad esempio si consideri il momento angolare che assume un elettrone nello scattering con un nucleone. Si supponga che il nucleone abbia raggio R ; l'elettrone incide con impulso $p_e = 2 \text{ MeV}/c$ quindi riesce ad assumere un momento angolare pari a $\ell = p_e R = 10 \text{ MeV} \cdot \text{fm}/c$, ovvero , in unità di \hbar , $\ell/\hbar = 10/200 = 0,05 \ll 1 = k_e R$. Dunque le transizioni proibite diventano importanti solo quando il nucleo non può fare una transizione permessa, altrimenti il loro contributo è insignificante.

- $\ell = 1$. **Transizioni Prime Proibite** : Per queste ovviamente $\vec{I}_i = \vec{I}_f + \vec{S} + \vec{\ell}$ quindi $\Delta I = 0, 1, 2$ e $\Pi_f = -\Pi_i$. Si distinguono in base al valore di S .
 - $S = 0$. **Transizioni prime proibite di Fermi** : per queste $\Delta I = 0, 1$ e $\Pi_f = -\Pi_i$.
 - $S = 1$. **Transizioni prime proibite di Gamow-Teller** : per queste⁴ $\Delta I = 0, 1, 2$ e $\Pi_f = -\Pi_i$.

Alcuni esempi di queste transizioni sono

$${}^{17}\text{N} \rightarrow {}^{17}\text{O} \quad \left(\frac{1}{2}^- \rightarrow \frac{5}{2}^+ \right) \quad (6.38)$$

$${}^{76}\text{Br} \rightarrow {}^{76}\text{Se} \quad (1^- \rightarrow 0^+) \quad (6.39)$$

- $\ell = 2$. **Transizioni Secondarie Proibite** : Per queste $\Delta I = 2, 3$ e $\Pi_f = \Pi_i$. Alcuni esempi di queste transizioni sono

$${}^{22}\text{Na} \rightarrow {}^{22}\text{Ne} \quad (3^+ \rightarrow 0^+) \quad (6.40)$$

$${}^{137}\text{Cs} \rightarrow {}^{137}\text{Ba} \quad \left(\frac{7}{2}^+ \rightarrow \frac{3}{2}^+ \right) \quad (6.41)$$

⁴Si noti che le transizioni $0^+ \rightarrow 0^-$ sono necessariamente di Gamow-Teller. Infatti se $I_i = I_f = 0$ l'unico modo per avere $\vec{\ell} + \vec{s} = 0$ con $\ell = 1$ è $S = 1$.

Capitolo 7

Modello vibrazionale del nucleo

7.1 Introduzione

Il problema della collocazione dei nucleoni nel nucleo non é di facile risoluzione. Evidenze sperimentali mostrano che si può assumere per i nucleoni una distribuzione secondo il modello a shell , come già fatto per gli elettroni esterni allo stesso nucleo. Questo comportamento é giustificato teoricamente dalle seguenti osservazioni

1. A distanze piccole l'interazione nucleone-nucleone é fortemente repulsiva, dunque i nucleoni non possono avvicinarsi molto.
2. I nucleoni sono fermioni quindi devono riempire i livelli energetici nello stesso modo degli elettroni.

La combinazione di queste due proprietà fa sì che i nucleoni si distribuiscano secondo un modello a shell. Supponiamo invece che il nucleo venga eccitato : inizia un moto di vibrazione. Per nuclei non troppo pesanti ($A < 150$) il modello basato su vibrazioni attorno alla forma sferica di equilibrio funziona abbastanza bene; per nuclei pesanti la forma non é più sferica ma ellissoidale. Per questi ultimi nuclei si avranno quindi altri modi di eccitazione, in particolare moti rotazionali attorno ad un asse NON di simmetria. Si osservi che i nucleoni non possono saltare facilmente da una shell all'altra , a causa dell'interazione forte. Se forniamo meno energia di quella necessaria al salto succede che i nucleoni, leggermente spostati dalla posizione di equilibrio , tentano di tornare nelle loro configurazioni fondamentali, dando luogo a moti collettivi, cioè modi vibrazionali attorno alla forma di equilibrio. Il primo stato eccitato del nucleo sarà quindi uno stato collettivo. Si può cercare il primo atomo che ammette uno stato eccitato

- $A = 2$: L'unico sistema con stati legati é dato dal Deuterio. L'energia di legame é di circa -2,2 MeV. Questo sistema NON ha stati eccitati.
- $A = 3$: Esistono due elementi , ^3H e ^3He . Le energie di legame sono rispettivamente di -8,5 MeV e -7,7 MeV. Si noti che il trizio é radioattivo e decade naturalmente in ^3He . Entrambi questi sistemi non hanno , però , stati eccitati.
- $A = 4$: É presente la particella α , data da ^4He . L'energia di legame é molto alta, circa 28,3 MeV : per rompere l'atomo e trasformarlo in un Deuterio più un protone all'infinito si devono dare 20 MeV di energia. Questo suggerisce che il sistema non abbia stati eccitati : l'unico stato eccitato possibile si trova sopra alla soglia quindi si tratta di una risonanza.

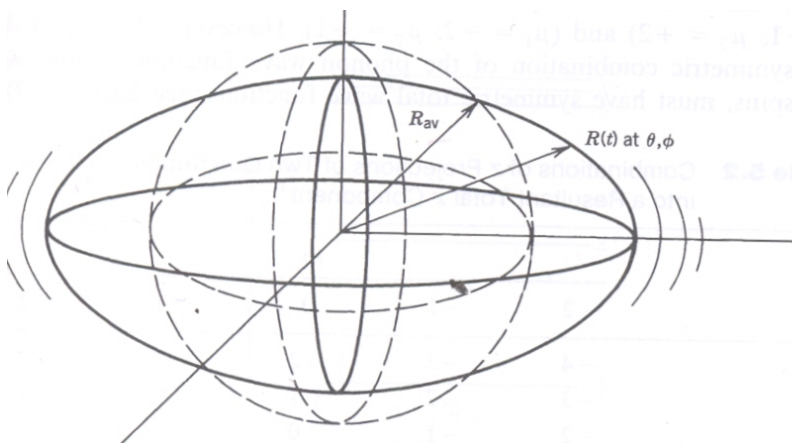
- $A = 5$: Non esiste nessun sistema di 5 nucleoni che sia legato. Infatti se si provasse ad avvicinare un nucleone alla particella α , cercando di formare ${}^5\text{He}$ la forza nucleare, a corto range, non sarebbe sufficiente per vincere il principio di Pauli che non permette il posizionamento di un solo nucleone in un nuovo livello della shell.
- $A = 6$: Esistono gli elementi ${}^6\text{Li}$, ${}^6\text{He}$. Il primo é piú leggero del secondo, mentre quest'ultimo decade β^- nel primo. Questi elementi NON hanno stati eccitati¹.
- $A = 7$: Il ${}^7\text{Li}$ rappresenta il primo nucleo con uno stato eccitato.
- $A = 8$: Non esiste un nucleo con 8 nucleoni.

7.2 Oscillazioni Nucleari

Si consideri il nucleo come una goccia sferica di liquido nucleare. Nello stato eccitato questa goccia inizierà a vibrare. La perturbazione può essere descritta considerando le oscillazioni del raggio intorno alla sua posizione di equilibrio; in formule si ha

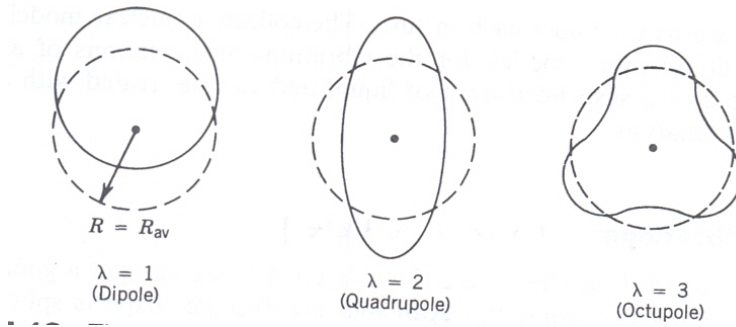
$$R(\vartheta, \varphi) = R_\alpha \left(1 + \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} a_{\lambda\mu} Y_{\lambda,\mu}(\vartheta, \varphi) \right) \quad (7.1)$$

Con questa parametrizzazione e con diversi valori di μ e λ si possono descrivere varie deformazioni della goccia.



- $\lambda = 0$: Si ha una deformazione lineare poiché $R(\vartheta, \varphi) = R(1 + \text{costante})$, quindi la sfera si contrae o si gonfia.
- $\lambda = 1$: Si ha un moto di oscillazione del centro di massa, quindi la circonferenza si muove senza deformarsi.
- $\lambda = 2$: Si ha un'oscillazione quadrupolare.
- $\lambda = 3$: Si ha un'oscillazione ottupolare.

¹Si noti che per $A < 6$ il tentativo di eccitare il nucleo porta ad una demolizione dello stesso.



Visto che si vogliono descrivere stati di bassa energia si deve imporre che il volume si mantenga costante nella deformazione, quindi si deve imporre l'uguaglianza

$$\frac{4\pi}{3} R_0^3 = \int r^2 dr d\Omega \quad (7.2)$$

Si ottiene quindi

$$\begin{aligned} \int r^2 dr d\Omega &= \int \int_0^{R(\vartheta, \varphi)} r^2 dr d\Omega = \int d\Omega \frac{R^3}{3}(\vartheta, \varphi) \\ &= \frac{R_\alpha^3}{3} \int d\Omega \left[1 + \sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} Y_{\lambda,\mu}(\vartheta, \varphi) \right]^3 \\ &= \frac{R_\alpha^3}{3} \int d\Omega \left[1 + 3 \sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} Y_{\lambda,\mu} + 3 \left(\sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} Y_{\lambda,\mu} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (7.3)$$

Infatti, visto che si tratta di piccole oscillazioni, il cubo può essere sviluppato fino al secondo ordine. Svolgendo l'integrale si ha

$$\begin{aligned} \frac{R_\alpha^3}{3} \int d\Omega \left[1 + 3 \sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} Y_{\lambda,\mu} + 3 \left(\sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} Y_{\lambda,\mu} \right)^2 \right] &= \\ &= \frac{R_\alpha^3}{3} \left[4\pi + 3 \sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} \int d\Omega Y_{\lambda,\mu}(\vartheta, \varphi) Y_{0,0} \sqrt{4\pi} + 3 \sum_{\lambda\mu} |a_{\lambda\mu}|^2 \int d\Omega |Y_{\lambda,\mu}|^2(\vartheta, \varphi) \right] \\ &= \frac{R_\alpha^3}{3} \left[4\pi + 3 \cdot \frac{\sqrt{4\pi}}{4\pi} a_{00} + 3 \sum_{\lambda\mu} |a_{\lambda\mu}|^2 \right] \\ &= \frac{4\pi}{3} R_\alpha^3 \left[1 + \frac{3a_{00}}{\sqrt{4\pi} \cdot 4\pi} + \frac{3}{4\pi} \sum_{\lambda\mu} |a_{\lambda\mu}|^2 \right] \end{aligned} \quad (7.4)$$

Si noti che tra la seconda e la terza uguaglianza è stata usata la condizione $\int d\Omega Y_{\lambda\mu}^* Y_{\ell m} = \delta_{\lambda\ell} \delta_{\mu m}$ ottenendo

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} \int d\Omega Y_{\lambda,\mu}(\vartheta, \varphi) Y_{0,0} \sqrt{4\pi} &= \sqrt{4\pi} \sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} \int d\Omega Y_{\lambda,\mu}(\vartheta, \varphi) Y_{0,0}^* = \\ &= \sqrt{4\pi} \sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} \delta_{\lambda 0} \delta_{\mu 0} = \sqrt{4\pi} \frac{a_{00}}{4\pi} = \frac{a_{00}}{\sqrt{4\pi}} \end{aligned} \quad (7.5)$$

: l'unico termine che contribuisce alla somma, infatti, è il termine zeresimo. Non resta, quindi, che porre l'uguaglianza

$$\frac{4}{3}\pi R_0^3 = \frac{R_\alpha}{3} \left(4\pi + 3 \frac{a_{00}}{\sqrt{4\pi}} + 3 \sum_{\lambda\mu} |a_{\lambda\mu}|^2 \right) \quad (7.6)$$

Visto che $\lambda = 0$ tiene conto delle compressioni ed espansioni del volume si può eliminare il termine nella somma con a_{00} : è stato supposto che il volume venga mantenuto costante. Inoltre non si conta il termine con $\lambda = 1$ in quando tiene conto di semplici traslazioni. Si ottiene quindi

$$\frac{4}{3}\pi R_0^3 = \frac{4\pi}{3} R_\alpha^3 \left(1 + \frac{3}{4\pi} \sum_{\lambda=2}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} |a_{\lambda\mu}|^2 \right) \simeq \frac{4\pi}{3} R_\alpha^3 \left[1 + \frac{1}{4\pi} \sum_{\lambda=2}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} |a_{\lambda\mu}|^2 \right]^3 \quad (7.7)$$

avendo riconosciuto lo sviluppo $(1+x)^3 \simeq (1+3x)$. Si ricava quindi

$$R_\alpha = \frac{R_0}{1 + \frac{1}{4\pi} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} |a_{\lambda\mu}|^2} \Rightarrow R(\vartheta, \varphi) = R_\alpha \left(1 + \sum_{\lambda=2}^{\infty} \sum_{\mu} a_{\lambda\mu} Y_{\lambda,\mu}(\vartheta, \varphi) \right) \quad (7.8)$$

7.3 Modello dinamico

Si deve ora costruire un modello dinamico per la goccia di liquido nucleare. Il problema consiste nel trovare l'Hamiltoniana del sistema in modo da calcolare gli energetici da evolvere nel tempo. Dato che si tratta di piccole oscillazioni l'energia cinetica è data da

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\lambda\mu} B_{\lambda\mu} |\dot{a}_{\lambda\mu}|^2$$

Per giustificare questa formula occorre costruire il sistema che descrive il fluido nucleare come incompressibile e irrotazionale. Vale quindi il seguente sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \rho + \vec{\nabla} \rho \vec{v} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{v} = 0 \end{cases} \quad (7.9)$$

La velocità può quindi essere scritta come gradiente di una certa funzione scalare ϕ : $\vec{v} = \vec{\nabla} \phi$, dove ϕ rappresenta il campo scalare delle velocità. Supponendo ρ costante (ipotesi di fluido incompressibile) si ottiene

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \rho = 0 \\ \nabla(\rho \vec{v}) = \rho \nabla \vec{v} \end{cases} \Rightarrow \rho(\nabla \vec{v}) = \rho \nabla(\nabla \phi) = \rho \nabla^2 \phi = -\frac{\partial}{\partial t} \rho = 0 \quad (7.10)$$

Quindi si ottiene l'equazione di Laplace

$$\nabla^2 \phi = 0$$

La soluzione dell'equazione di Laplace sono date dalle potenze $\propto r^\lambda$; in particolare

$$\phi = \sum_{\lambda\mu} b_{\lambda\mu} r^\lambda Y_{\lambda,\mu}(\vartheta, \varphi) \quad (7.11)$$

Le soluzioni irregolari $\propto r^{-(\lambda+1)}$ sono state scartate a causa della loro irregolarità nell'origine : dato che il punto 0 appartiene al fluido occorre, infatti, che il campo di velocità sia ivi ben definito. Le condizioni al contorno da porre sono

$$\begin{cases} v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} \equiv \dot{R}(\vartheta, \varphi) \\ \text{in } r = R_0 \end{cases} \quad (7.12)$$

Sviluppando la (7.12) si ottiene

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_{r=R_0} = \sum_{\lambda\mu} b_{\lambda\mu} \lambda R_0^{\lambda-1} Y_{\lambda\mu} = \left(\frac{\partial R}{\partial t} \right)_{R=R_0} = R_0 \sum_{\lambda\mu} \dot{a}_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu} \quad (7.13)$$

Confrontando i coefficienti delle somme si ha

$$\lambda b_{\lambda\mu} R_0^{\lambda-1} = R_0 \dot{a}_{\lambda\mu} \Rightarrow b_{\lambda\mu} = \dot{a}_{\lambda\mu} \frac{R_0^{-\lambda+2}}{\lambda} \quad (7.14)$$

Quindi la soluzione particolare é data da

$$\phi = \sum_{\lambda\mu} \frac{R_0^{-\lambda+2}}{\lambda} \dot{a}_{\lambda\mu} r^\lambda Y_{\lambda,\mu}(\vartheta, \varphi) \quad (7.15)$$

Conoscendo ϕ si può facilmente calcolare l'energia cinetica, infatti²

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_V v^2(\vec{r}) d^3r = \frac{1}{2} \rho \int |\vec{\nabla} \phi|^2 d^3r = \frac{1}{2} \rho \oint_S \phi^* \vec{\nabla} \phi d\vec{S} \quad (7.16)$$

Passiamo quindi al calcolo esplicito³

$$\phi^* = \left(\sum_{\lambda'\mu'} \frac{R_0^{-\lambda'+2}}{\lambda'} \dot{a}_{\lambda'\mu'}^* r^{\lambda'} Y_{\lambda'\mu'}^* \right)_{R_0} = \sum_{\lambda'\mu'} \frac{R_0^{-\lambda'+2+\lambda'}}{\lambda'} \dot{a}_{\lambda'\mu'}^* Y_{\lambda'\mu'}^* \quad (7.17)$$

$$\nabla \phi = \left(\sum_{\lambda\mu} \frac{R_0^{-\lambda+2}}{\lambda} \dot{a}_{\lambda\mu} \lambda r^{\lambda-1} Y_{\lambda\mu} \right)_{R_0} = \sum_{\lambda\mu} R_0^{-\lambda+2+\lambda-1} \dot{a}_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu} \quad (7.18)$$

Integriamo sulla superficie infinitesima (a raggio R_0 fissato) : $d\vec{S} = R_0^2 d\Omega \hat{n}$, dove \hat{n} é il versore normale alla superficie.

$$\oint \phi^* \vec{\nabla} \phi d\vec{S} = \sum_{\lambda\mu} \sum_{\lambda'\mu'} \frac{R_0^3}{\lambda'} \dot{a}_{\lambda'\mu'}^* \dot{a}_{\lambda\mu} R_0^2 \int Y_{\lambda\mu} Y_{\lambda'\mu'} d\Omega = \sum_{\lambda\mu} R_0^5 \dot{a}_{\lambda\mu} \sum_{\lambda'\mu'} \frac{1}{\lambda'} \dot{a}_{\lambda'\mu'}^* \delta_{\lambda\mu} \delta_{\lambda'\mu'} = \sum_{\lambda\mu} \frac{R_0^5}{\lambda} |\dot{a}_{\lambda\mu}|^2 \quad (7.19)$$

Riprendendo la (7.16) si ha quindi

$$T = \frac{1}{2} \rho \sum_{\lambda\mu} \frac{R_0^5}{\lambda} |\dot{a}_{\lambda\mu}|^2 \equiv \frac{1}{2} \sum_{\lambda} B_{\lambda} |\dot{a}_{\lambda\mu}|^2 \quad (7.20)$$

²L'ultima uguaglianza segue dal teorema della divergenza.

³Utilizziamo due indici diversi λ, μ e λ', μ' perché nel prodotto non si potrà subito confondere i due termini in un'unica somma.

Per l'energia potenziale bisogna considerare due termini : uno Coulombiano e uno di superficie : $V = E_S - E_S^{(0)} + E_C - E_C^{(0)}$ con

$$\begin{cases} E_S = \sigma \oint dS = \sigma \int \sqrt{1 + |\vec{\nabla} R|^2} R^2 d\Omega \\ E_C = \frac{1}{2} \int \frac{\rho(\vec{r}_1)\rho(\vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} E_S^{(0)} = \sigma 4\pi R_0^2 = \sigma 4\pi r_0^2 A^{2/3} = a_S A^{2/3} \\ E_C^{(0)} = a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} \end{cases} \quad (7.21)$$

Il potenziale ha dunque la forma

$$V = \frac{1}{2} \sum_{\lambda\mu} C_{\lambda\mu} |a_{\lambda\mu}|^2 \quad \text{dove } C_{\lambda\mu} \equiv C_\lambda^S - C_\lambda^C \quad (7.22)$$

Sono stati definiti inoltre per comodità le costanti (al variare di λ) seguenti

$$C_\lambda^S = \sigma R_0^2 (\lambda - 1)(\lambda + 2) \quad (7.23)$$

$$C_\lambda^C = \frac{3}{2\pi} \frac{(eZ)^2}{R_0} \frac{\lambda - 1}{2\lambda + 1} \quad (7.24)$$

L'Hamiltoniana finale assume quindi la forma⁴

$$H_{\text{coll}} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda\mu} (B_\lambda |\dot{a}_{\lambda\mu}|^2 + C_\lambda |a_{\lambda\mu}|^2) \quad (7.25)$$

Questo rappresenta una somma finita di oscillatori armonici indipendenti. Calcolando il momento coniugato $\pi_{\lambda\mu}$ alla variabile $a_{\lambda\mu}$ si ha

$$\pi_{\lambda\mu} = \frac{\partial T}{\partial \dot{a}_{\lambda\mu}} = B_\lambda \dot{a}_{\lambda\mu}^* \Rightarrow H_{\text{coll}} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda\mu} \left(\frac{1}{B_\lambda} |\pi_{\lambda\mu}|^2 + C_\lambda |a_{\lambda\mu}|^2 \right) \quad (7.26)$$

Con queste definizioni risulta immediata la regola di commutazione $[a_{\lambda\mu}, \pi_{\lambda\mu}] = i\hbar$. Si noti che in H_{coll} tutti i modi sono disaccoppiati (modi normali), in virtù della (7.26). Utilizzando il formalismo di seconda quantizzazione si possono introdurre gli operatori di creazione e distruzione $p_{\lambda\mu}, p_{\lambda\mu}^\dagger$, definiti da

$$\begin{cases} a_{\lambda\mu} = \sqrt{\frac{\hbar}{2B_\lambda\omega_\lambda}} \left(p_{\lambda\mu} + (-1)^\mu p_{\lambda, -\mu}^\dagger \right) \\ \pi_{\lambda\mu} = \sqrt{\frac{\hbar B_\lambda\omega_\lambda}{2}} \left(p_{\lambda\mu}^\dagger - (-1)^\mu p_{\lambda, -\mu} \right) \end{cases} \quad \text{con } \omega_\lambda \equiv \sqrt{\frac{C_\lambda}{B_\lambda}} \quad (7.27)$$

L'Hamiltoniana si trasforma quindi in

$$H_{\text{coll}} = \sum_{\lambda\mu} \hbar\omega_\lambda (p_{\lambda\mu}^\dagger p_{\lambda\mu} + 1/2) \quad (7.28)$$

I livelli energetici si calcolano quindi banalmente con

$$E_\lambda = \hbar\omega_\lambda \sum_{\mu} \left(N_\mu + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega_\lambda \left(\sum_{\mu} N_\mu + \frac{1}{2} \sum_{\mu} 1 \right) = \hbar\omega_\lambda \left(N + \frac{2\lambda + 1}{2} \right) \quad (7.29)$$

Infatti μ rappresenta il numero magnetico, quindi assumerà $(2\lambda + 1)$ valori. Con questo modello si riesce quindi ad avere una stima accurata dei livelli energetici. Nello stato fondamentale

⁴Il pedice _{coll} stá per collettivo.

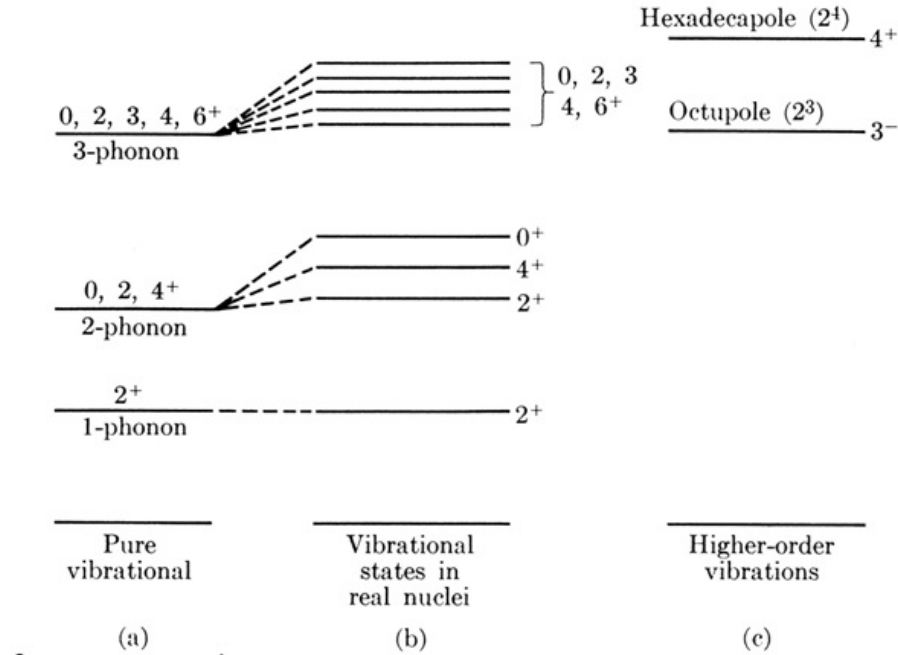
qualsiasi nucleo descritto da questo modello si trova nello stato $J^\Pi = 0^+$. Gli stati successivi si possono costruire applicando $p_{\lambda\mu}^\dagger |0^+\rangle$. A seconda dell'oscillazione ($\lambda = 0, 1, 2 \dots$) varierá quindi il primo stato eccitato : nel caso ottupolare, ad esempio, $p_{\lambda\mu}^\dagger |0^+\rangle = 3^-$. Dal modello collettivo si possono ricavare altre importanti proprietá. A tal proposito si supponga di voler costruire lo stato di piú fononi dallo stato fondamentale $|0\rangle$ con momento angolare definito : si dovrá applicare $p_{\lambda\mu}^\dagger p_{\lambda\mu}^\dagger |0\rangle$. Dato che i fononi sono bosoni ci sará simmetria per scambio di stato, ovvero

$$\sum_{\mu_1, \mu_2} \langle \lambda\mu_1; \lambda\mu_2 | J, M \rangle p_{\lambda\mu_1}^\dagger p_{\lambda\mu_2}^\dagger |0\rangle = |J, M\rangle = \sum_{\mu_1, \mu_2} \langle \lambda\mu_2; \lambda\mu_1 | J, M \rangle p_{\lambda\mu_2}^\dagger p_{\lambda\mu_1}^\dagger |0\rangle \quad (7.30)$$

Utilizzando la proprietá dei coefficienti di Clebsch-Gordan si ha quindi

$$\langle \lambda\mu_1; \lambda\mu_2 | J, M \rangle = (-1)^J \langle \lambda\mu_2; \lambda\mu_1 | J, M \rangle \quad (7.31)$$

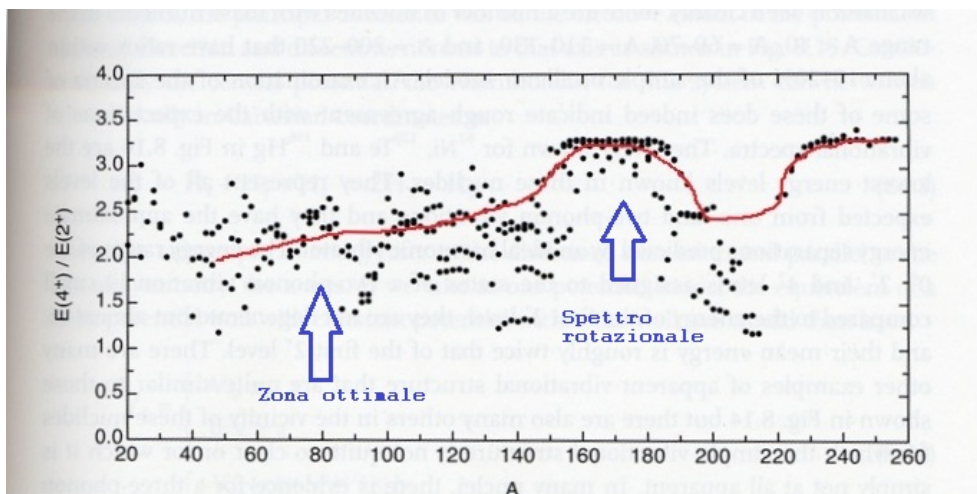
Quindi, per quanto visto prima, J deve essere pari. Dunque gli stati eccitati di due fononi sono⁵ 2^+ , 4^+ . La situazione descritta é riportata nella figura seguente



7.4 Spettro Vibrazionale e Spettro rotazionale

Per verificare la bontá del modello elaborato si può osservare se sopra al secondo stato eccitato dell'elemento é presente una nuova banda di stati. Altrimenti si può misurare una transizione elettromagnetica : il valore di questa sará proporzionale al numero di nucleoni che fanno la transizione. In particolare un indice di validitá del modello sará dato dal rapporto tra l'energia del secondo stato eccitato e quella del primo stato eccitato, al variare di A . Il valore di questo rapporto é riportato nel grafico seguente.

⁵In realtá intorno allo stato 4^+ ci sono altri stato 0^+ e 2^+ ad energie diverse anche se molto ravvicinati : questa anomalia rappresenta una delle deviazioni dal modello.



Visto che il rapporto $E(4^+)/E(2^+)$ rappresenta un indice della validità del modello, da questo grafico si possono trarre importanti informazioni. Si osserva innanzitutto che, a fronte di un valore aspettato di $\simeq 2$, il rapporto varia tra 1 e circa 3,5: il modello è applicabile solo in un certo range di nuclei. In particolare nella zona in cui $A \simeq 90 \div 120$ si ha un rapporto costante di 3,33: questo significa che, dopo lo stato 2^+ compare uno stato 4^+ . Questo si verifica perché aggiungendo neutroni il nucleo non ha più forma sferica ma tende a schiacciarsi diventando un'ellissoide. Questo tipo di forma geometrica per i nuclei comporta la comparsa di uno spettro rotazionale. Gli autovalori per questo spettro si trovano facilmente considerando l'equazione di Schroedinger. L'Hamiltoniana del sistema rotante è data da

$$H_{\text{rot}} = \frac{\hat{R}^2}{2I} \quad (7.32)$$

dove I è il momento di inerzia del sistema. Risolvendo si trova

$$\frac{\hat{R}^2}{2I} \psi = E_J \psi \Rightarrow \hat{R}^2 Y_{JM} = J(J+1) \hbar^2 Y_{JM} \Rightarrow E_J = \frac{J(J+1)}{2I} \hbar^2 \text{ con } J = 0, 2, 4, \dots \quad (7.33)$$

Quindi $E_\lambda \sim \lambda(\lambda+1)$ e dunque il rapporto tra due stati sarà del tipo

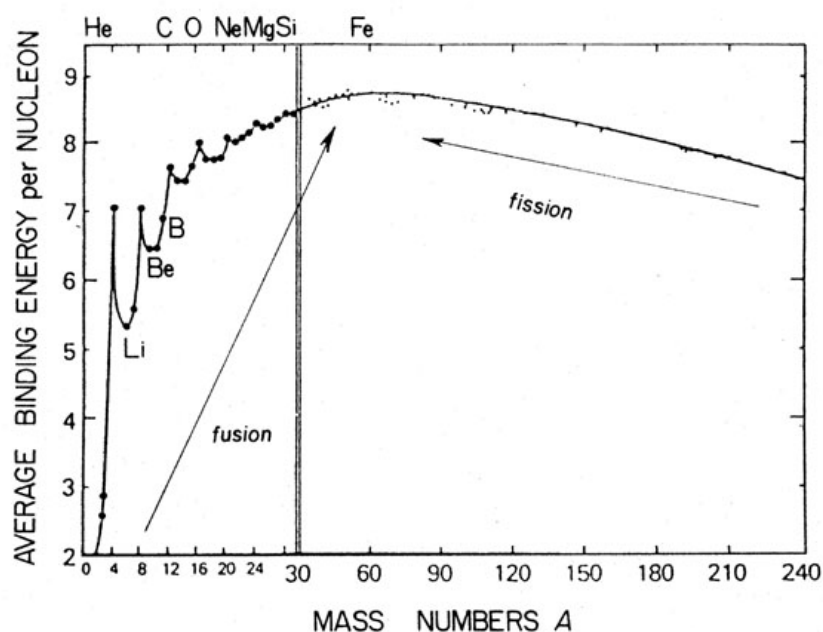
$$\frac{E_n}{E_m} \sim \frac{n(n+1)}{m(m+1)}$$

Ovviamente gli spettri rotazionali e vibrazionali possono combinarsi tra di loro dando luogo a spettri roto-vibrazionali.

Capitolo 8

Fissione Nucleare

Nella fissione il nucleo di un elemento pesante - ad esempio uranio-235 o plutonio 239 - decade in frammenti di minori dimensioni, ovvero in nuclei di atomi a numero atomico inferiore, con emissione di una grande quantit di energia e radioattivit. A differenza della fusione nucleare questo processo é conveniente solo per elementi molto pesanti, come mostra il grafico della binding energy.



Si possono identificare due tipi di fissione

Fissione Spontanea Avviene spontaneamente in un nucleo senza eccitazione.

$${}^A_Z X_N \rightarrow {}^{A_1}_{Z_1} Y_{N_1} + {}^{A_2}_{Z_2} W_{N_2} + k \cdot n \quad (8.1)$$

dove k é un intero. Ovviamente dovrà valere che $A_1 + A_2 + k = A$ e $Z_1 + Z_2 = Z$. I neutroni emessi spontaneamente vengono chiamati neutroni pronti e vengono emessi in un tempo di circa 10^{-16} s.

Fissione indotta Il nucleo può essere eccitato con dei neutroni in modo che raggiunga lo stato X^* , detto nucleo composto.

$${}^A_Z X_N + n \rightarrow {}^{A+1}_{Z+1} X^* \rightarrow Y + W + k \cdot n \quad (8.2)$$

Se si definisce con $\nu \equiv \langle k \rangle$ si può dare una stima dei neutroni liberati : ad esempio nell' ^{235}U vengono emessi $\nu = 2,423 + 0,066 \cdot E_n$, con E_n energia dei neutroni ($E_n < 1 \text{ MeV}$). L'emissione di questo numero di neutroni comporterebbe una reazione incontrollata che porterebbe ad una sicura esplosione : per reazioni controllate occorre quindi progettare un sistema di assorbimento dei neutroni. Osservando il grafico della Binding Energy si nota che tra il nucleo limite per la fissione, ^{56}Fe e i nuclei più pesanti con $A = 240$ c'è circa 1 MeV di differenza : questo significa che nella fissione viene liberato circa 1 MeV per nucleone, ovvero $Q \simeq 200 \text{ MeV}$. Queste energia viene liberata sotto forma di energia cinetica dei frammenti.

8.1 Reazioni favorite

Utilizzando il modello a goccia è possibile avere una stima per prevedere quali sono i valori di A per i quali una reazione di fissione risulta favorita. Si consideri, per semplicità, il caso di una reazione simmetrica

$${}_Z^AX_N \rightarrow 2 {}_{Z/2}^{A/2}Y_{N/2} \quad , Q = M(A, Z) - 2M\left(\frac{A}{2}, \frac{Z}{2}\right) \quad (8.3)$$

Visto che, in generale, $M(A, Z) = Zm_p + Nm_n - B(A, Z)$ il Q di reazione è la differenza delle due binding energy :

$$Q = 2B\left(\frac{A}{2}, \frac{Z}{2}\right) - B(A, Z) \quad (8.4)$$

Sfruttando ora il modello a goccia si ha che la binding energy può essere scritta come¹

$$B(A, Z) = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(A - 2Z)^2}{A} \quad (8.5)$$

Sostituendo la (8.5) nella (8.4) si cancellano tutti i termini tranne quello di superficie e quello Coulombiano.

$$Q = a_S(1 - 2^{1/3})A^{2/3} + a_C(1 - 2^{-2/3})\frac{Z^2}{A^{1/3}} = -0,26 \cdot a_S \cdot A^{2/3} + 0,37 \cdot a_C \cdot \frac{Z^2}{A^{1/3}} \quad (8.6)$$

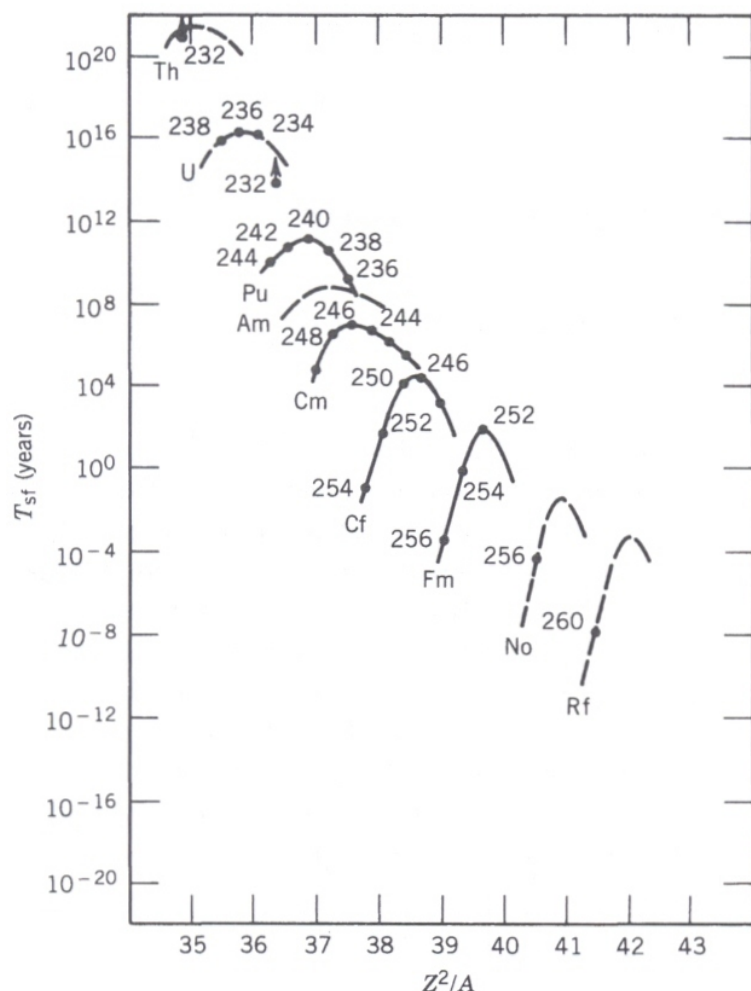
Si noti che il termine di superficie inibisce la fissione mentre il termine Coulombiano la favorisce : in effetti aumentando la superficie si creano elettroni meno legati ma si guadagna in repulsione Coulombiana. Per ricavare un limite utile per la fissione occorre quindi porre $Q > 0$:

$$\frac{Z^2}{A} > \frac{0,26 a_S}{0,37 a_C} \simeq 0,7027 \cdot \frac{a_S}{a_C} \simeq 18,2 \quad (8.7)$$

avendo sostituito i valori di $a_S = 18,56 \text{ MeV}$ e $a_C = 0,717 \text{ MeV}$. Questa rappresenta una condizione necessaria per la reazione ma non sufficiente. Ad esempio si prenda il nucleo $^{88}_{38}\text{Sr}$: per questo $Z^2/A \simeq 16,41$ quindi la fissione non è possibile. Vi sono poi alcuni elementi come $^{106}_{46}\text{Pd}$ con $Z^2/A \simeq 19,96$ e $^{208}_{82}\text{Pb}$ con $Z^2/A \simeq 32,32$ che rimangono stabili. Il nucleo $^{238}_{92}\text{U}$ ha $Z^2/A \simeq 35,56$ è stabile perché decade molto lentamente con una vita media di $\tau \simeq 10^{16} \text{ yr}$. Il Q di questa reazione è di circa 177 MeV. Gli ultimi casi sono rappresentati da nuclei artificiali

¹Il termine di pairing verrà ora trascurato anche se dopo si osserverà che questo è di fondamentale importanza nelle reazioni di fissione : da questo dipende, ad esempio, la fissionabilità dell' ^{235}U piuttosto che dell' ^{238}U .

${}^{256}_{100}\text{Fm}$ con $Z^2/A \simeq 39,06$ e $\tau \simeq 2,63$ hr e infine ${}^{258}_{102}\text{No}$ con $Z^2/A \simeq 40,32$ e $\tau \simeq 1,2$ ms. I tempi di vita media per i vari nuclei sono riportati graficamente nell'immagine seguente.



(8.8)

La deviazione dall'andamento lineare é dovuta ad effetti di shell.² Dal confronto con i tempi di vita media si vede che la condizione $Q > 0$ non é sufficiente a garantire la fissionabilità degli elementi. Infatti si deve pensare che i due nuclei figli siano formati per fluttuazioni nel nucleo iniziale e che, quindi, debbano oltrepassare una barriera di potenziale del tipo

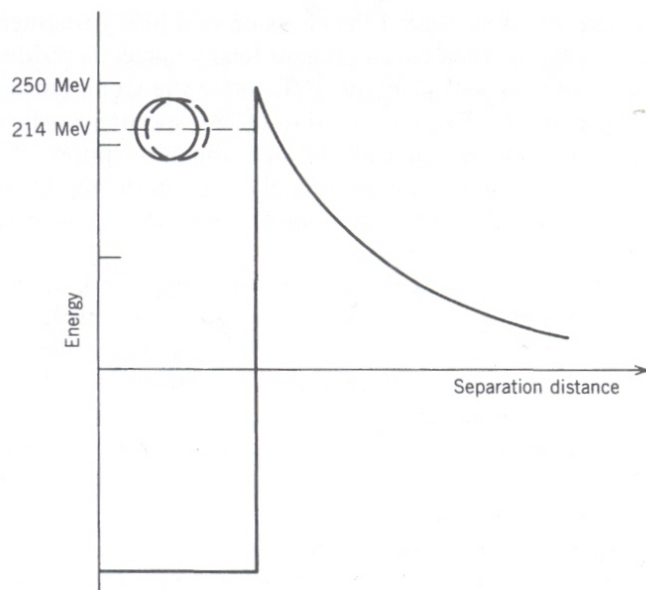
$$U(r) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1^2}{r} \Rightarrow U(R_1 + R_2) \simeq 250 \text{ MeV} \quad (8.9)$$

dove R_1 ed R_2 rappresentano i raggi nucleari dei nuclei figli ($R_1 + R_2 = 2R$ nel caso simmetrico).

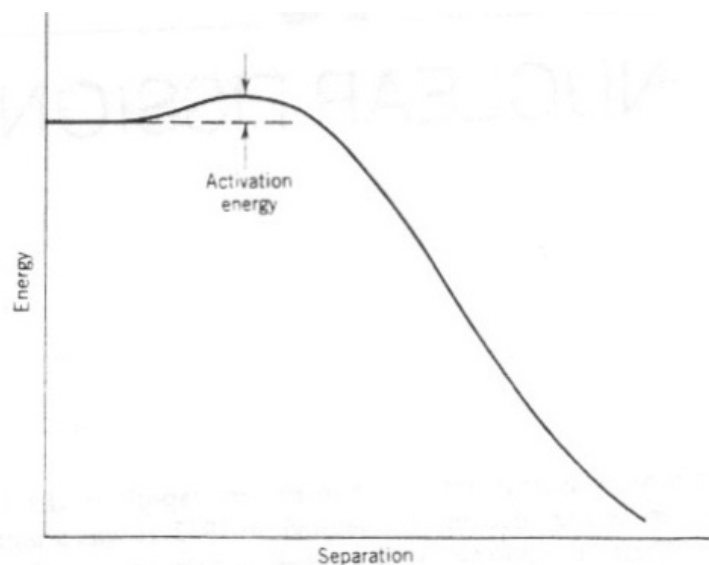
²Swiatecki propose una legge sperimentale che tenesse conto di questa correzione nella massa degli elementi : $M(A, Z) = Zm_p + Nm_n - B_{\text{LDM}} - B_{\text{shell}}$ (LDM sta per *liquid drop model*). Per la vita media si estrapola una legge del tipo

$$\log \tau = \log T + k\delta M$$

dove $k \simeq 5$ e M é la massa dell'elemento.



La barriera può essere attraversata per effetto tunnel (effetto con probabilità rilevante solo nel caso di nuclei fissili spontaneamente) oppure fornendo energia di eccitazione.



8.2 Deformazioni del nucleo

Per una trattazione più accurata della fissione occorre considerare le deformazioni che il nucleo subisce durante il processo. In effetti questo subisce deformazioni della forma , originalmente sferica, come mostrato in figura.



Si indichi con E l'energia totale del nucleo. Ovviamente l'energia dipenderà dai parametri di deformazione ε_i : $E(\varepsilon) = M(\varepsilon)$ ($c = 1$) con $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$. Se il nucleo è sferico quindi

$\varepsilon_i = 0$, $\forall i$, altrimenti viene deformato. Il raggio del nucleo si può scrivere , per la (7.1) , come

$$R(\vartheta, \varphi) = A_\alpha R_0 \left\{ 1 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{+\lambda} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda,\mu}(\vartheta, \varphi) \right\} \quad (8.10)$$

Utilizzando questa relazione si può esprimere il volume in termini dei parametri di deformazione

$$V(\varepsilon) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{R(\vartheta, \varphi)} r^2 dr = \frac{4}{3} \pi R_0^3 \quad (8.11)$$

Nel caso di simmetria assiale

$$R(\vartheta, \varphi) = A_\alpha R_0 \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n P_n(\cos \vartheta) \right\}$$

L'energia totale del nucleo si può quindi scrivere come

$$E(\varepsilon) = M(\varepsilon) = Zm_p + Nm_n - B(\varepsilon) \quad (8.12)$$

$$E(0) = M(0) = Zm_p + Nm_n - B(0) : \text{nucleo sferico} \quad (8.13)$$

Definendo $U(\varepsilon) = E(\varepsilon) - E(0) = -B(\varepsilon) + B(0)$ si nota che il nucleo risulta stabile quando $B(0) > B(\varepsilon)$, ovvero per $U(\varepsilon) > 0$. Questo rappresenta il primo criterio per decidere se un nucleo può fissionare spontaneamente : se $U(\varepsilon)$ é negativa il nucleo tenderá piú facilmente a fissionare spontaneamente. Per scrivere esplicitamente i $B(\varepsilon)$ utilizziamo il modello a goccia liquida

$$B(\varepsilon) = \alpha_V V - E_S(\varepsilon) - E_C(\varepsilon) - E_{\text{sym}}(\varepsilon) \quad (8.14)$$

$$B(0) = \alpha_V V - E_S(0) - E_C(0) - E_{\text{sym}}(0) \quad (8.15)$$

Le ipotesi sono che il volume si mantenga costante, che la carica elettrica sia uniformemente distribuita e che non ci siano addensamenti di neutroni o protoni ($Z/N \sim \text{costante}$) : in questo modo il termine di volume e di simmetria si cancellano quando si calcola la differenza tra $B(0)$ e $B(\varepsilon)$. Restano da calcolare i termini

$$E_S(\varepsilon) = \sigma S(\varepsilon) \quad (8.16)$$

$$E_C(\varepsilon) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \rho_q^2 \int_V d^3r \int_V d^3r' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (8.17)$$

e analogamente per il caso sferico

$$E_S(0) = \sigma 4\pi R_0^2 = 4\pi\sigma r_0^2 A^{2/3} = a_S A^{2/3} \quad (8.18)$$

$$E_C(0) = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Z^2}{r_0 A^{1/3}} = a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} \quad (8.19)$$

Si ha che $U(\varepsilon) = E_S(\varepsilon) - E_S(0) + E_C(\varepsilon) - E_C(0)$. Si supponga quindi , per semplicitá , che il nucleo venga deformato in un ellissoide di rotazione con un piccolo parametro di deformazione ε . In questo caso il raggio si scrive come $R(\vartheta) = R_0(1 + \alpha_2 P_2(\cos \vartheta))$. Gli assi dell'ellisse sono dati da

$$\begin{cases} a = R_0(1 + \varepsilon) \\ b = \frac{R_0}{\sqrt{1+\varepsilon}} \end{cases} \Rightarrow \quad (8.20)$$

Si noti che , con questi dati, é soddisfatta la condizione $V = \frac{4}{3}\pi ab^2 \equiv \frac{4}{3}\pi R_0^3$. Si puó mostare che la superficie aumenta proporzionalmente alla deformazione della sfera , quindi $S = 4\pi R_0^2(1 + \frac{2}{5}\varepsilon^2 + \dots) \equiv S(\varepsilon)$. Il termine Coulombiano invece , durante la deformazione , decresce come $\varepsilon^2/5$. All'ordine piú basso in ε (escluso lo zeresimo ovviamente) si trovano quindi le condizioni

$$E_S(\varepsilon) \simeq E_S(0)(1 + \frac{2}{5}\varepsilon^2) \quad (8.21)$$

$$E_C(\varepsilon) \simeq E_C(0)(1 - \frac{1}{5}\varepsilon^2) \quad (8.22)$$

Dunque si ricava

$$U(\varepsilon) = \frac{2}{5}\varepsilon^2 E_S(0) - \frac{1}{5}\varepsilon^2 E_C(0) = \frac{1}{5}(2a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}})\varepsilon^2 \quad (8.23)$$

Se il primo termine é piú grande del secondo la differenza di energia é positiva : si acquista energia nella deformazione del nucleo e quindi maggiore é la deformazione, maggiore energia viene acquistata. Questo tipo di nucleo é instabile sotto deformazione e tende quindi a fissionare SPONTANEAMENTE. La condizione per la fissione si puó quindi scrivere come

$$\frac{1}{5}a_C Z^2 A^{-1/3} > \frac{2}{5}a_S A^{2/3} \Rightarrow \frac{a_C}{2a_S} \frac{Z^2}{A} > 1 \quad (8.24)$$

Questo ci suggerisce di introdurre un parametro di fissionabilitá dato da

$$x \equiv \frac{1}{2} \frac{E_C(0)}{E_S(0)} = \frac{a_C}{2a_S} \frac{Z^2}{A} \quad (8.25)$$

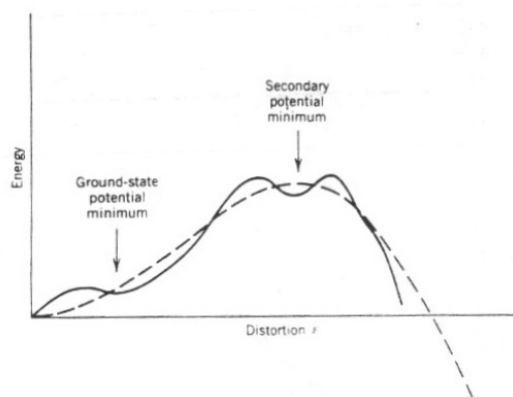
Il valore $x = 1$ definisce un regime intermedio (valore critico) per la fissionabilitá

$$\frac{Z^2}{A}(x = 1) = \left(\frac{Z^2}{A} \right)_{\text{crit}} = \frac{2a_S}{a_C} \simeq 51,8$$

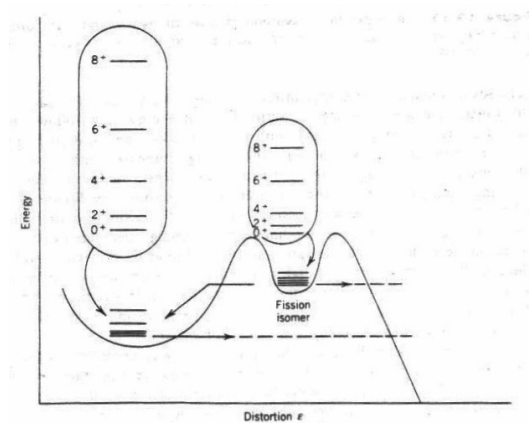
La goccia rimane stabile , rispetto alla deformazione, quando $x < 1$; viceversa la goccia é instabile.

Elemento	x
$^{106}_{46}\text{Pd}$	0,385
$^{208}_{82}\text{Pb}$	0,624
$^{238}_{92}\text{U}$	0,686
$^{256}_{100}\text{Fm}$	0,754
$^{258}_{102}\text{No}$	0,778

Si noti infine che il solo parametro ε non é sufficiente a descrivere la forma del nucleo quando questo si fissa : si dovrebbe infatti descrivere con ulteriori parametri la tipica forma strozzata assunta dal nucleo durante il processo. Se si aumentano i parametri U diventa quindi una ipersuperficie : i punti di sella (in 2+1 dimensioni) rappresentano i punti di instabilitá scelti dal nucleo , quello ad energia piú bassa sará il favorito. Deformando il nucleo si ha una redistribuzione dei livelli del modello a shell : questo causa un diverso andamento della $U(\varepsilon)$ con conseguenti nuove configurazioni (meta)stabili. Il potenziale , dunque, si modifica e assume il tipico andamento a doppia buca ben visibile in figura.

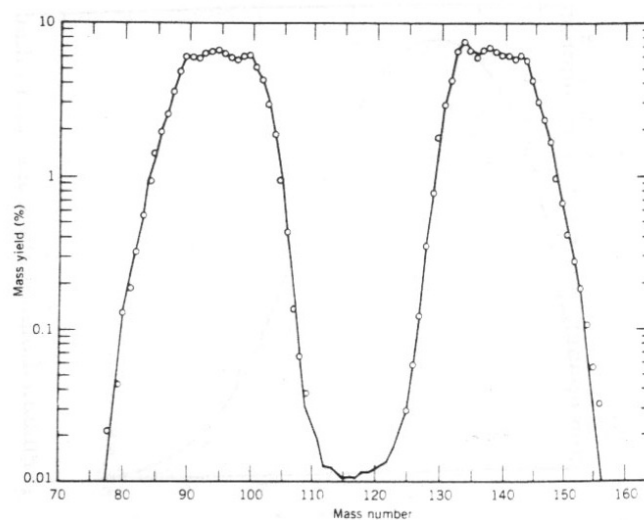


Nella seconda buca di potenziale si trovano gli *isomeri di forma* : elementi con vita media molto più breve (infatti la barriera da oltrepassare è molto più sottile).

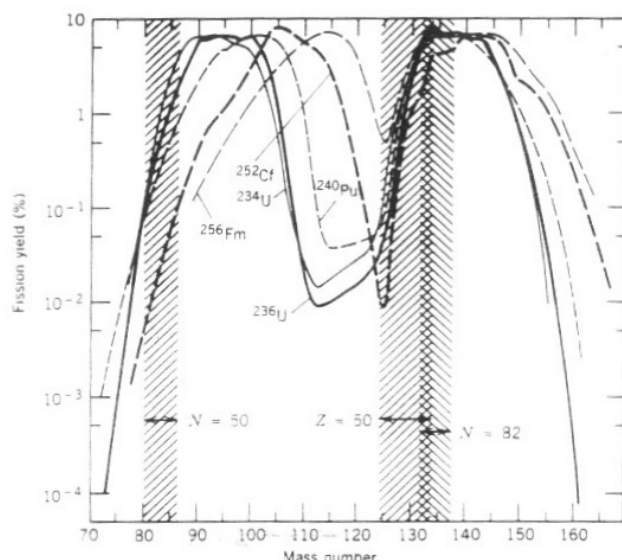


8.3 Distribuzione dei frammenti di fissione

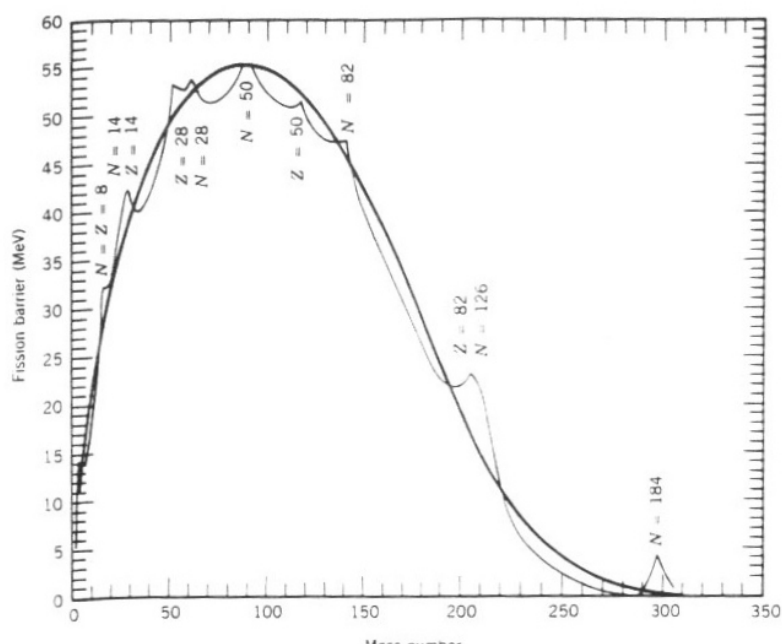
In figura è graficata la distribuzione in massa dei frammenti ottenuti dalla fissione termica dell' ^{235}U .



Si nota che la distribuzione é simmetrica , come ci si aspettava ma che il caso di fissione simmetrica ha poca probabilità di avvenire. Questo si può spiegare notando che , in questo caso, la barriera Coulombiana ha un massimo visto che l'interazione EM presenta un massimo funzionale in $Z_1 = Z_2$: in questi casi la fissionabilità spontanea é svantaggiata. Analizziamo ora un altro grafico.



Se si confrontano le distribuzioni di frammenti per alcuni isotopi come ^{233}U , ^{235}U e ^{239}Pu si nota che la curva é shiftata : in realtà la traslazione per elementi più pesanti non avviene in modo perfettamente proporzionale. Infatti la distribuzione dei frammenti leggeri si sposta leggermente in avanti mentre quella dei frammenti pesanti rimane praticamente identica : questo é dovuto ad effetti di shell, infatti nei frammenti pesanti c'è una sovrapposizione di numeri magici , quindi si ha un elemento prodotto doppiamente magico, ovvero molto legato e stabile che tende a formarsi più facilmente : il picco dei frammenti pesanti presenta quindi un picco su questo elemento e tende a spostarsene il meno possibile. Gli effetti correttivi dovuti al modello a shell sono ben visibili, oltre che nell'immagine precedente, anche in quella seguente dove viene rappresentata la variazione dell'energia di attivazione per la fissione in funzione di A . Si noti che la previsione teorica del modello a shell (linea più sottile) presenta dei picchi proprio sui nuclei che hanno numeri magici.

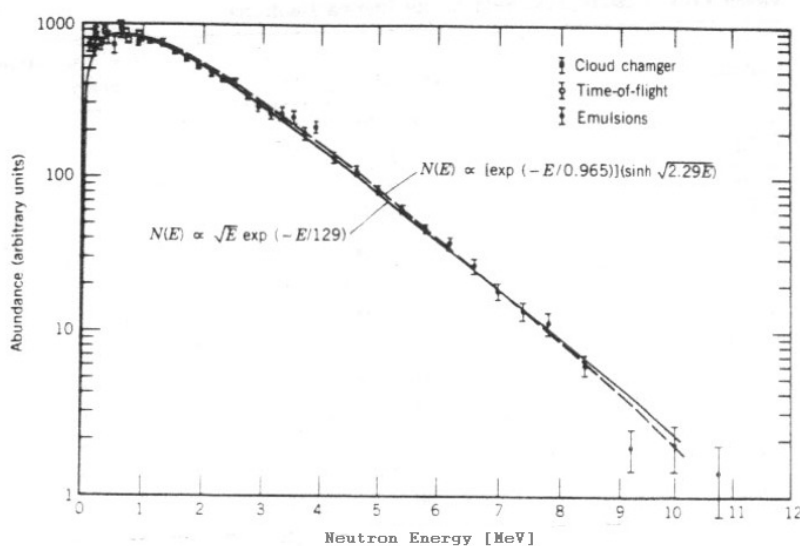


8.4 Neutroni della fissione

I neutroni emessi durante la fissione hanno uno spettro di energia del tipo

$$f_n(E) = k \left(\frac{0,775 \cdot E}{\bar{n}} \right)^{1/2} e^{-0,775 \cdot E} \quad (8.26)$$

Questa é simile ad una Maxwell-Boltzmann ed é un tipico *spettro evaporativo*: il sistema ha piú neutroni di quanti ne possano tenere i frammenti quindi questi evaporano via subito dopo la fissione. Questo andamento é visibile in figura



In questa seconda figura é invece rappresentata la probabilità di emissione (P_ν) di un certo numero di neutroni (ν) in relazione al valor medio ($\bar{\nu}$), per varie fissioni.

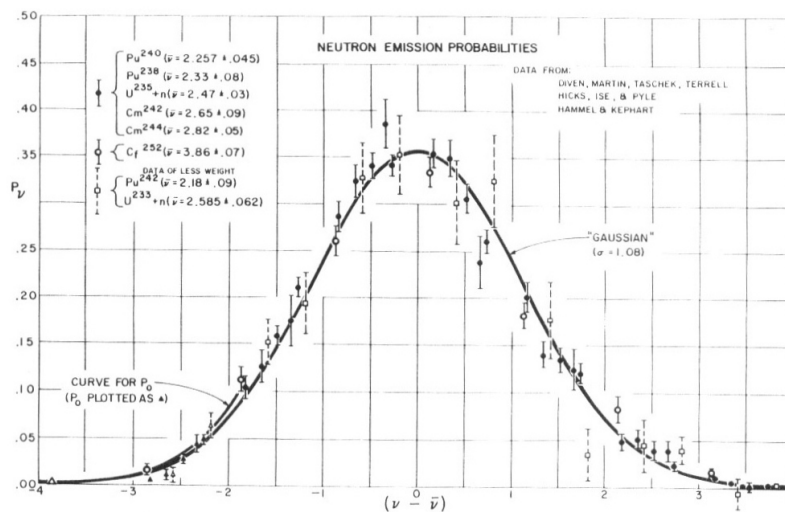


Figure 13.7 Distribution of fission neutrons. Even though the average number of neutrons $\bar{\nu}$ changes with the fissioning nucleus, the distribution about the average is independent of the original nucleus. From J. Terrell, in *Physics and Chemistry of Fission*, Vol. 2 (Vienna: IAEA, 1965), p. 3.

Si nota che, nonostante il numero medio di neutroni cambi a seconda del nucleo fissionato, la distribuzione attorno al valor medio rimane pressoché identica e indipendente dal nucleo originale. Oltre ai neutroni pronti, che costituiscono lo spettro evaporativo appena descritto, vi sono anche dei *neutroni ritardati*: questi sono neutroni emessi in certi casi dopo un decadimento β del frammento della fissione. Se si immagina di proiettare il processo nel piano $N - Z$ si può descrivere l'emissione di neutroni ritardati nel modo seguente: dalla fissione si generano due frammenti più neutroni pronti; in seguito i frammenti decadono β per raggiungere l'isobaro ($A = \text{cost.}$) stabile. In generale però dopo il decadimento β accade che il nucleo risultante si trovi in uno stato eccitato che non ha ancora raggiunto la *valle di stabilità* (sempre nel piano $N - Z$): in questo caso può essere emesso un neutrone dopo un ritardo $\sim \text{sec.}$ I neutroni coinvolti nella fissione nucleare vengono divisi in:

Neutroni Termici : $E \sim 0,025 \div 0,1 \text{ eV}$

Neutroni EpiTermici : $E \sim 1 \div 10 \text{ eV}$

Neutroni Lenti : $E \sim 1 \div 10 \text{ KeV}$

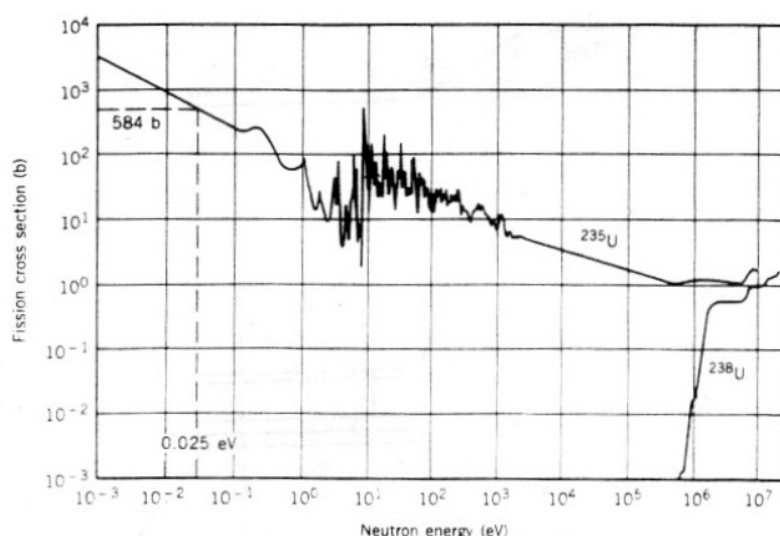
Neutroni Veloci : $E \sim 100 \text{ KeV} \div 10 \text{ MeV}$

8.5 Sezione d'urto per fissione indotta

Per la scelta di un materiale fissile ad alta efficienza conviene considerare varie caratteristiche del materiale come Abbondanza relativa, tempo di dimezzamento e sezione d'urto. Per quanto riguarda le prime due caratteristiche si nota, dalla tabella seguente, che tra gli isotopi dell'uranio sono disponibili l'uranio-235 e il 238.

A	Stabile	Abbondanza (%)	$T_{1/2}$	Decadimento
233	✗	0,770	0,1592 Myr	α
234	✗		0,245 Myr	α
235	✓			
236	✗		23,45 Myr	α
237	✗	99,275	6,75 day	β^-
238	✓			
239	✗		23,5 min	β^-

Nel grafico seguente viene riportata la sezione d'urto dei due isotopi ^{235}U , ^{238}U .



Questa curva contiene moltissime informazioni. Si nota innanzitutto che il comportamento della sezione d'urto per energie comprese tra l'eV e il migliaio di eV é assimilabile alle risonanze dovute all'assorbimento del neutrone. Inoltre si osserva che utilizzando come materiale fissile ^{235}U conviene utilizzare neutroni di bassa energia : la sezione d'urto per neutroni termici é circa 600 volte la sezione d'urto per neutroni veloci. Nel caso si vogliano utilizzare i neutroni ad energie del MeV prodotti dalla fissione per indurre nuove fissioni questi dovranno essere rallentati ad energie di neutroni termici in modo da aumentare la sezione d'urto. Purtroppo l'uranio-235 é poco abbondante in natura quindi bisogna utilizzare l'uranio-238 utilizzando neutroni ad energie molto alte. Un moderno reattore consiste quindi di due parti

Materiale Fissile : Da origine alla fissione : Uranio.

Moderatore : Rallenta i neutroni per portarli all'energia termica. Per moderare , trascurando processi anelastici tra neutroni e moderatore , servono moderatori con A tale che

- $E \geq 0,1 \text{ MeV}$: A piccolo
- $E \geq 1 \text{ MeV}$: A grande

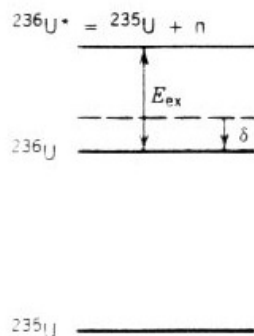
Queste due parti possono essere accorpate in un unico apparecchio : in tal caso si parla di reattore omogeneo, altrimenti eterogeneo.

8.6 Energia della fissione

Si consideri il processo



La differenza tra i livelli energetici dei vari isotopi é visibile in figura



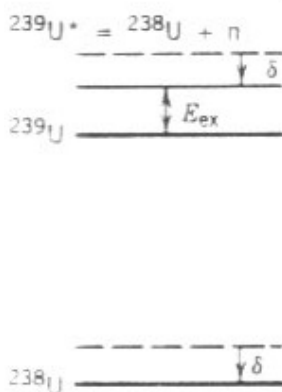
Si indichi con E_{ex} la differenza tra la massa dei due isotopi (eccitato e no) dell'uranio :

$$E_{\text{ex}} \equiv M({}^{236}\text{U}^*) - M({}^{236}\text{U}) \quad (c = 1)$$

Trascurando l'energia cinetica del neutrone (neutroni termici) l'energia dello stato eccitato si può scrivere come $M({}^{236}\text{U}^*) \simeq M({}^{235}\text{U}) + m_n$. L'energia E_{ex} può essere vista come somma di ΔE , il gap di energia tra i livelli di ${}^{236}\text{U}$ e ${}^{236}\text{U}^*$, e δ , ovvero l'extra binding energy dovuta al termine aggiuntivo di *pairing*. Si ha quindi che

$$E_{\text{ex}} \simeq M({}^{235}\text{U}) + m_n - M({}^{236}\text{U}) \equiv S_n = 6,54 \text{ MeV} \quad (8.28)$$

dove S_n é definita come *separation energy* del neutrone. Visto che $E_{\text{att}}({}^{236}\text{U}) = 6,2 \text{ MeV} < E_{\text{ex}}$ allora ${}^{236}\text{U}$ può essere fissionato senza energia spesa per i neutroni. Per la fissione dell' ${}^{238}\text{U}$ invece si ha $E_{\text{ex}} = 4,8 \text{ MeV}$ mentre $E_{\text{att}} = 6,6 \text{ MeV}$.



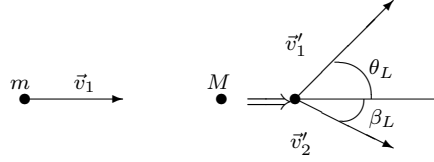
Quindi per fissionare quest'ultimo elemento servono neutroni di energia $\sim \text{MeV}$. Si vede quindi che il termine di pairing δ gioca il ruolo di inibitore o catalizzatore della fissione : l'energia di legame dell' ${}^{236}\text{U}$ é incrementata (ovvero, l'energia dello stato fondamentale é diminuita) di un valore δ ($\sim 0,56 \text{ MeV}$) ; l'energia di eccitazione é quindi incrementata di δ . Nel caso dell' ${}^{238}\text{U}$ l'energia dello stato fondamentale ,prima della cattura del neutrone, é diminuita di δ e quindi l'energia di eccitazione é ridota anch'essa di δ . La differenza in energia di eccitazione tra questi due isotopi é quindi di circa $2\delta \sim 1,1 \text{ MeV}$.

8.7 Rallentamento dei neutroni

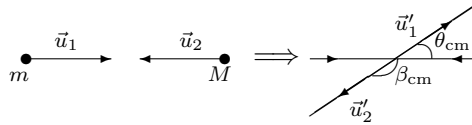
Si vuole ora studiare la dinamica dell'urto tra i neutroni ed i nuclei del materiale moderatore. A tal scopo si indica con m la massa del neutrone e con $\vec{v}_1(t)$ la sua velocità ; analogamente M é la massa del nucleo su cui il neutrone impatta e $\vec{v}_2(t)$ la sua velocità ($\vec{v}_2(0) = 0$).

Sistema del Laboratorio : Dopo l'urto il neutrone avrà una velocità \vec{v}'_1 e la sua direzione sarà deviata dai un angolo ϑ_L rispetto alla sua direzione iniziale ; analogamente per il nucleo \vec{v}'_2 , β_L . Trascurando la Binding Energy $M \simeq Am$ quindi

$$\vec{v}_{\text{cm}} = \frac{m}{m+M} \vec{v}_1 = \frac{1}{1+A} \vec{v}_1 \quad (8.29)$$



Sistema del Centro di Massa : In questo sistema le due velocità sono \vec{u}_1 e \vec{u}_2 prima dell'urto, mentre dopo questo si hanno le velocità \vec{u}'_1 e \vec{u}'_2 con angoli rispettivamente di ϑ_{cm} e β_{cm} rispetto alla direzione iniziale.



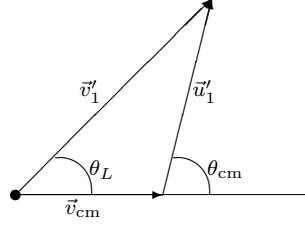
Con semplici conti di cinematica si possono esplicitare le relazioni tra i due sistemi:

$$\begin{cases} \vec{u}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_{\text{cm}} = \frac{M}{M+m} \vec{v}_1 = \frac{A}{A+1} \vec{v}_1 \\ \vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_{\text{cm}} = -\frac{m}{M+m} \vec{v}_1 = -\frac{1}{A+1} \vec{v}_1 \end{cases} \quad (8.30)$$

Inoltre

$$\begin{cases} u'_1 = u_1 \\ u'_2 = u_2 \end{cases} \quad (8.31)$$

per l'elasticità dell'urto. L'energia persa dai neutroni durante l'urto é data dalla differenza tra l'energia iniziale $E_0 = \frac{1}{2}mv_1^2$ e l'energia finale $E = \frac{1}{2}m(v'_1)^2$. Con una semplice analisi vettoriale (vd.figura seguente)



si nota che $\vec{u}'_1 = \vec{v}'_1 - \vec{v}_{\text{cm}}$ dunque

$$(v'_1)^2 = (\vec{u}'_1 + \vec{v}_{\text{cm}})^2 = v_{\text{cm}}^2 + u_1'^2 + 2v_{\text{cm}}u_1' \cos \vartheta_{\text{cm}} \quad (8.32)$$

Sostituendo la (8.29) e la (8.30) nella (8.32) si ottiene , per il rapporto E/E_0

$$\frac{E}{E_0} = \frac{v_1'^2}{v_1^2} = \frac{m^2 + M^2 + 2mM \cos \vartheta_{\text{cm}}}{(M + m)^2} = \frac{1 + A^2 + 2A \cos \vartheta_{\text{cm}}}{(A + 1)^2} \quad (8.33)$$

Conviene introdurre una nuova variabile

$$\alpha \equiv \left(\frac{A - 1}{A + 1} \right)^2, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (8.34)$$

in modo da riscrivere il rapporto E/E_0 in termini di questa.

$$\frac{E}{E_0} = \frac{1}{2} [(1 + \alpha) + (1 - \alpha) \cos \vartheta_{\text{cm}}] \quad (8.35)$$

Da qui si vede subito che $\alpha \leq \frac{E}{E_0} \leq 1$ quindi l'energia varia tra $E_{\text{min}} \equiv \alpha E_0 \leq E \leq E_0 \equiv E_{\text{max}}$, ovvero $\alpha = E_{\text{min}}/E_0$. Si può ricavare infine la relazione che lega l'angolo di scattering nei due sistemi di riferimento. Osservando che $v'_1 \cos \vartheta_L = v_{\text{cm}} + u'_1 \cos \vartheta_{\text{cm}}$ si ricava , utilizzando la (8.29) ,

$$\cos \vartheta_L = \frac{v_{\text{cm}} + u'_1 \cos \vartheta_{\text{cm}}}{v'_1} = \frac{A \cos \vartheta_{\text{cm}} + 1}{\sqrt{A^2 + 2A \cos \vartheta_{\text{cm}} + 1}} = \frac{A + 1}{2} \sqrt{\frac{E}{E_0}} - \frac{A - 1}{2} \sqrt{\frac{E_0}{E}} \quad (8.36)$$

8.8 Distribuzione di probabilità per l'energia dei neutroni scatterati

Si supponga di essere nel caso di scattering a basse energie, per cui $\ell = 0$ e la distribuzione angolare é isotropa nel riferimento del centro di massa. Se si indica con dW la distribuzione di probabilità che il neutrone venga trovato , dopo l'urto , con un angolo ϑ_{cm} é data da

$$dW = p(\vartheta_{\text{cm}}) d\vartheta_{\text{cm}} = \frac{\int_{\varphi} d\Omega}{4\pi} = \frac{2\pi \sin \vartheta_{\text{cm}} d\vartheta_{\text{cm}}}{4\pi} = \frac{1}{2} \sin \vartheta_{\text{cm}} d\vartheta_{\text{cm}} = -p(E) dE \quad (8.37)$$

Infatti si deve calcolare il rapporto tra l'area sottesa dall'angolo solido individuato da ϑ_{cm} e tutto l'angolo. Nell'ultima uguaglianza il segno é stato scelto negativo perché al crescere dell'angolo di scattering l'energia dei neutroni diminuisce. Si ottiene quindi , utilizzando la (8.35) ,

$$\frac{dE}{d\vartheta_{\text{cm}}} = -\frac{E_0}{2} [(1 - \alpha) \sin \vartheta_{\text{cm}}] \Rightarrow \frac{d\vartheta_{\text{cm}}}{dE} = \frac{2}{E_0(\alpha - 1) \sin \vartheta_{\text{cm}}} \quad (8.38)$$

Quindi

$$p(E) = -\frac{p(\vartheta_{\text{cm}}) d\vartheta_{\text{cm}}}{dE} = -\frac{1}{2} \sin \vartheta_{\text{cm}} \cdot \frac{2}{E_0(\alpha - 1) \sin \vartheta_{\text{cm}}} = \frac{1}{(1 - \alpha)E_0} \quad (8.39)$$

Quindi la probabilità é costante e non nulla solo per energie comprese tra αE_0 e E_0 .

1. Teniamo fisso E_0 e variamo A . In questo caso si vede che al variare di A la curva si sposta : ad esempio per l'idrogeno $\alpha E_0 = 0$. Se si graficano le varie situazioni si ottengono una serie di rettangoli che diminuiscono progressivamente la base e aumentano in altezza al crescere di A .
2. Teniamo fisso A e variamo E_0 : una rappresentazione di questo tipo é detta degli urti successivi. In questo caso $E_0 > E_0^{(1)} > E_0^{(2)} > \dots$. Facendo un grafico anche in questo caso si nota che la distribuzione tende a spostarsi verso lo 0. Più realisticamente , al posto di una distribuzione di probabilità costante (rettangolo) possiamo inserire una curva continua e notare che il picco della curva si sposta verso lo 0 ad ogni urto successivo.

Da quanto visto sembrerebbe conveniente definire una quantità , detta *decremento logaritmico medio dell'energia dei neutroni* , data da

$$\xi \equiv \langle \log \frac{E_0}{E} \rangle = \int_{\alpha E_0}^{E_0} p(E) \log \frac{E_0}{E} dE = 1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \log \alpha = 1 + \frac{(A-1)^2}{2A} \log \frac{A-1}{A+1} \quad (8.40)$$

Si noti che per l'idrogeno $A = 1 \Rightarrow \xi = 1$, mentre invece per $A \rightarrow \infty, \xi \rightarrow 0$. Infine definendo³ $\langle \log E \rangle \equiv \log E_1$ si ha che

$$\xi = \log E_0 - \langle \log E \rangle = \log E_0 - \log E_1 \Rightarrow \log E_1 = \log E_0 - \xi \Rightarrow E_1 = E_0 e^{-\xi} \quad (8.41)$$

Il valor medio dell'energia del neutrone sarà $E_1 = E_0 e^{-\xi}$ dopo un urto, $E_2 = E_1 e^{-\xi} = E_0 e^{-2\xi}$ dopo due urti..etc.. Questo ragionamento si può iterare, ottenendo, per n urti ,

$$E_n = E_0 e^{-n\xi} \Rightarrow n = \left(\log \frac{E_0}{E_n} \right) \frac{1}{\xi} \quad (8.42)$$

In particolare se si considera come energia finale quella dei neutroni termici e come iniziale $E_0 \simeq 1 \div 2$ MeV la relazione appena ottenuta fornisce una stima di urti necessari per termalizzare i neutroni. Si può quindi costruire una tabella dove si evidenzia l'efficienza del materiale moderatore.

Elemento	A	α	ξ	n
H	1	0	1	18
D \equiv ^2H	2	0,111	0,725	28
^{12}C	12	0,716	0,158	114
^{238}U	238	0,983	0,00838	2172

8.9 Moderatore ideale

Il moderatore ideale dovrebbe essere poco costoso , facile da reperire, stabile dal punto di vista chimico, molto efficiente nell'assorbire i neutroni , compatto e con sezione d'urto di assorbimento molto alta. Il moderatore più comune é costruito con la grafite , altrimenti si utilizza l'acqua. Lo svantaggio dell'acqua é che la sezione d'urto della reazione $n + p \rightarrow D + \gamma$ é tale che vengono persi molti neutroni. Per ovviare a questo problema si può utilizzare acqua pesante o uranio arricchito. Lo svantaggio dell'acqua pesante é che risulta molto costosa. Il

³L'esistenza di E_1 é assicurata dal teorema della media.

prototipo di un reattore che sfrutta questo tipo di funzionamento é dato dal reattore di tipo CAND. Si introduca un fattore k_∞ definito dalla seguente

$$k_\infty = \frac{N(i+1)}{N(i)} = \frac{\text{n. neutroni termici alla } (i+1)\text{-esima generazione}}{\text{n. neutroni termici alla generazione } i\text{-esima}} \quad (8.43)$$

La situazione ideale sarebbe quella in cui $k_\infty = 1$: infatti se $k_\infty > 1$ il nucleo diventa instabile ed il reattore diventa supercritico. Analogamente , per $k_\infty = 1$ il reattore é detto critico, altrimenti subcritico. Si dovranno implementare meccanismi che non facciano uscire il reattore dalla zona $k_\infty \leq 1$. Si noti che questo fattore si può scrivere come il prodotto di quattro fattori diversi. Inizialmente , al fine di semplificare la trattazione, conviene considerare che il reattore abbia dimensioni infinite. Procedendo per step progressivi si ha

1. $N(i)$ neutroni termici provocano la fissione. Il numero di neutroni finali é dato da $N(i)\eta$ neutroni veloci. Il parametro η si può calcolare tenendo conto di tutti i processi che partecipano alla fissione ma che fanno perdere neutroni.

$$\begin{aligned} \eta &\propto \frac{\text{n. Neutroni che provocano fissione}}{\text{n. Neutroni assorbiti}} \\ &\propto \frac{\text{Sezione d'urto macroscopica di fissione}}{\text{Sezione d'urto Macroscopica di fissione} + \text{Sezione d'urto di fissione per assorbimento}} \\ &\equiv \frac{\Sigma_F}{\Sigma_F + \Sigma_a} \nu \end{aligned} \quad (8.44)$$

dove ν é il numero medio di neutroni pesanti. Si ha quindi che

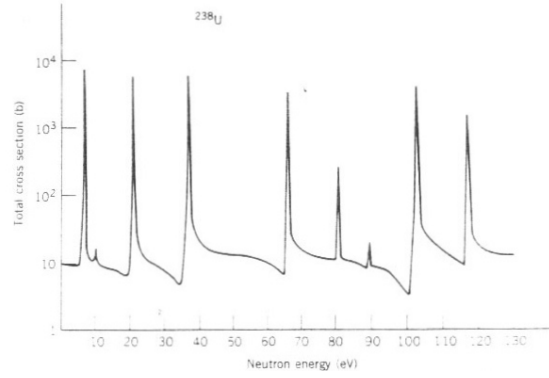
$$\eta \equiv \nu \frac{\Sigma_F}{\Sigma_F + \Sigma_a} \quad (8.45)$$

dove la sezione d'urto macroscopica Σ_F é definita come $\Sigma_F = \rho_F \sigma_F$ ove ρ_F é la densità del materiale fissile e σ_F é la sezione d'urto usuale. Questo rapporto é calcolabile : ad esempio per l'uranio naturale (^{238}U al 98,28% , ^{235}U allo 0,72%) si ottiene⁴ $\eta^{(\text{nat U})} \simeq 1,34$. Arricchendo ulteriormente l'uranio (aumentando la percentuale di ^{235}U) si può aumentare il valore di η in modo da avere più neutroni pronti.

2. Sono disponibili $N(i)\eta$ neutroni veloci che possono dare luogo a delle fissioni. Per tenere conto di queste fissioni spontanee dei neutroni veloci si introduce un nuovo fattore di fissione veloce ε : tenendo conto di questo fattore il numero di neutroni diventa quindi $N(i)\eta\varepsilon$. Per l'uranio naturale $\varepsilon = 1,03$.
3. Se si grafica la sezione d'urto di assorbimento di questi neutroni si nota che , per energie comprese tra 10 e 10^2 eV si trovano delle risonanze : i neutroni di queste energie vengono quindi assorbiti e persi.

⁴I dati sperimentali sono

$$\sigma_F(^{235}\text{U}) \simeq 584\text{barn}; \sigma_F(^{238}\text{U}) \simeq 0\text{barn}; \sigma_a(^{235}\text{U}) \simeq 97\text{barn}; \sigma_a(^{238}\text{U}) \simeq 2,75\text{barn}$$



Per tener conto anche di questo effetto si introduce un nuovo fattore p . Se p é la probabilità di evitare la risonanza, dopo il passaggio da questa zona di energia i neutroni sono diventati $N(i)\eta\epsilon p$. Si noti che la presenza di queste risonanze impone un limite allo spessore dei moderatori : dovranno essere progettati in modo che il neutrone si trovi fisicamente dentro a queste quando incontra le risonanze.

4. Si definisce inoltre un fattore f per tener conto della frazione di neutroni termici che vengano assorbiti.

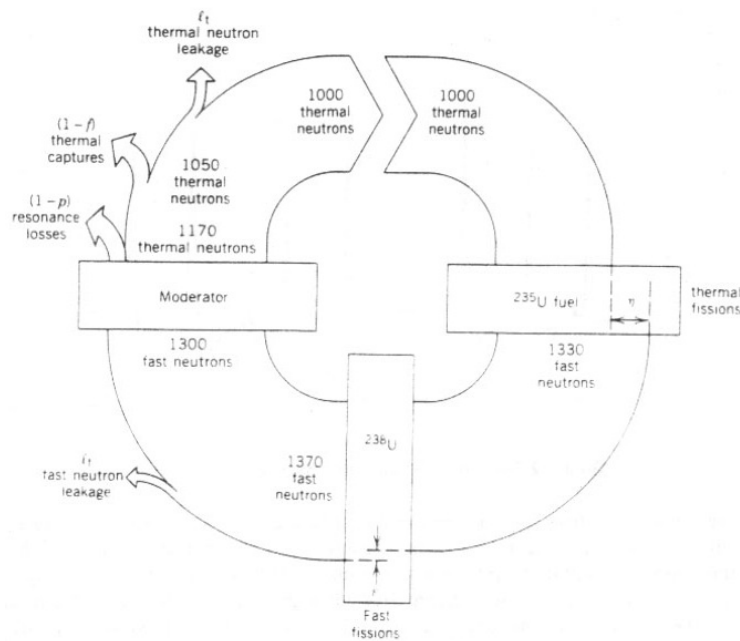
Il fattore k_∞ si scrive quindi come

$$k_\infty = \eta\epsilon\rho f \quad (8.46)$$

Si può dimostrare che, nel caso di reattore finito, la formula corretta é data da

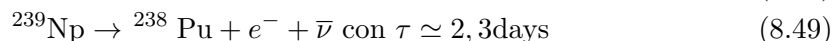
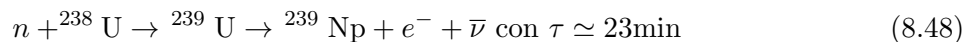
$$k = k_\infty(1 - l_F)(1 - l_{th}) \quad (8.47)$$

dove si é tenuto conto degli effetti dei neutroni veloci (F) e termici.

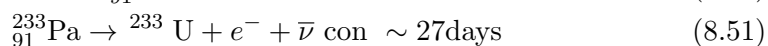
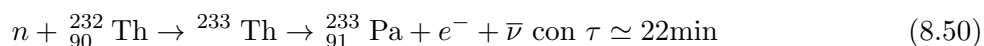


8.10 Reattori Autofertilizzanti

Si utilizzano materiali fertilizzanti che non sono fissili spontaneamente ma che lo diventano successivamente. Si può utilizzare, ad esempio, l'uranio-238. Si noti la catena di reazioni

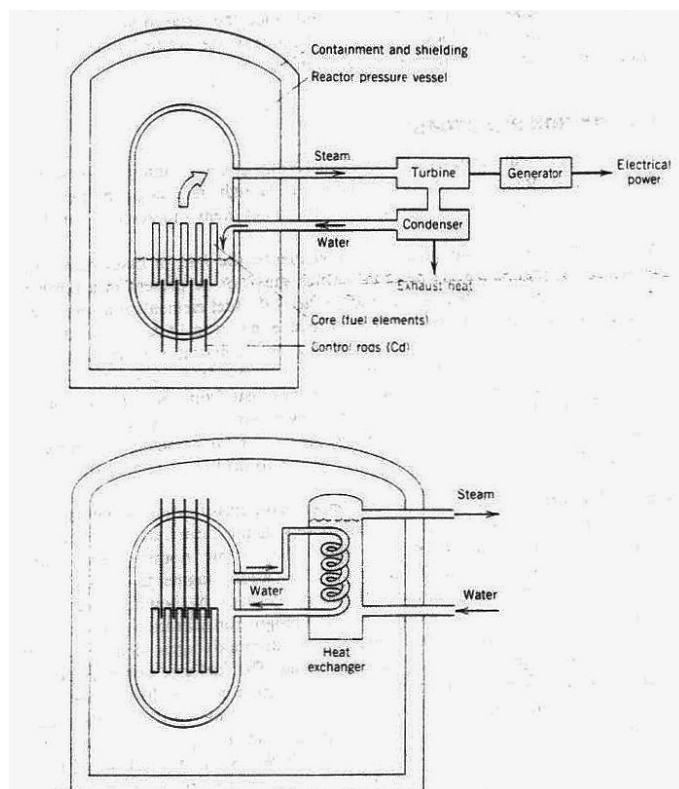


Si noti che ${}^{239}\text{Pu}$ è materiale fissile ed ha $\sigma_F(E_{\text{th}}) = 742$ barn. Un altro fertilizzante che si può utilizzare è il ${}^{232}\text{Th}$.



Si noti che ${}^{233}\text{U}$ è materiale fissile ed ha $\sigma_F(E_{\text{th}}) = 530$ barn. Si noti inoltre che l'uranio-233 non è stabile, ma decade α con una vita media di circa 0,16 milioni di anni. Utilizzando questi metodi si costruiscono reattori del tipo FBR che utilizzano come materiale refrigerante il Sodio Liquido.

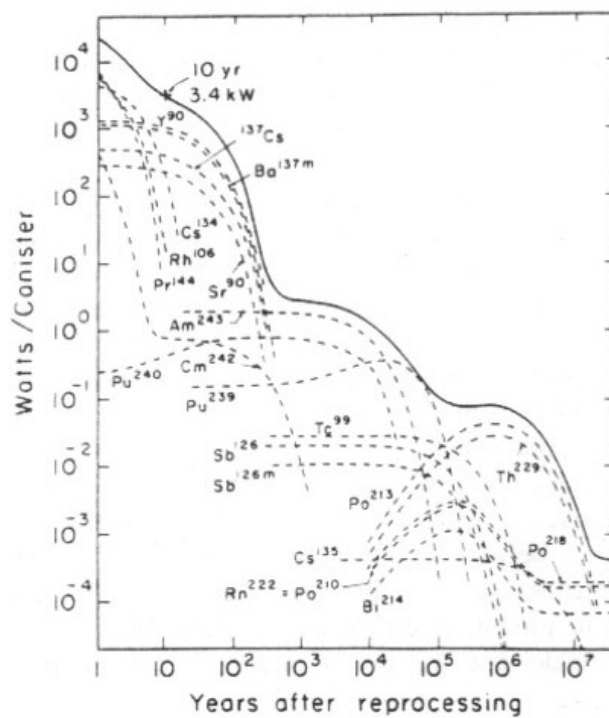
8.11 Struttura di un reattore



Il secondo disegno rappresenta una miglioria che è stata fatta ai reattori di prima generazione: in questi ultimi, infatti, l'acqua che veniva riscaldata nel nucleo era la stessa che azionava le turbine!

8.12 Smaltimento delle scorie

Un grosso problema della produzione di energia tramite reazioni nucleari é , come noto, lo smaltimento delle scorie. In effetti i frammenti prodotti dalla fissione decadono con vite medie che possono arrivare fino a milioni di anni, come mostra il seguente grafico.



Appendice A

Particelle e loro proprietà

A.1 Quark

A.1.1 Classificazioni

Sapore(Flavour)	Massa [Mev/ c^2]	Spin (σ)	Num.Barionico	Q/e	\mathcal{S}	Π	T_3
u (up)	$1,7 \div 3,3$	$1/2$	$1/3$	$2/3$	0	+1	$+1/2$
d (down)	$4,1 \div 5,8$	$1/2$	$1/3$	$-1/3$	0	+1	$-1/2$
s (strange)	~ 101	$1/2$	$1/3$	$-1/3$	-1	+1	0
c (charm)	~ 1270	$1/2$	$1/3$	$+2/3$	0		0
t (top)	~ 172000	$1/2$	$1/3$	$2/3$	0		0
b (bottom)	~ 4190	$1/2$	$1/3$	$-1/3$	0		0

A.1.2 Struttura a quark degli adroni

Nucleoni

$$\begin{cases} |p\rangle \equiv |uud\rangle \\ |n\rangle \equiv |udd\rangle \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Pioni

$$\begin{cases} |\pi^+\rangle \equiv |u\bar{d}\rangle \\ |\pi^-\rangle \equiv |\bar{u}d\rangle = \overline{|\pi^+\rangle} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Kaoni

$$\begin{cases} |K^0\rangle \equiv |d\bar{s}\rangle \\ |K^+\rangle \equiv |u\bar{s}\rangle \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Barioni Σ

$$\begin{cases} |\Sigma^+\rangle \equiv |uus\rangle \\ |\Sigma^0\rangle \equiv |uds\rangle \\ |\Sigma^-\rangle \equiv |dds\rangle \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Barioni Ξ

$$\begin{cases} |\Xi^-\rangle \equiv |dss\rangle \\ |\Xi^0\rangle \equiv |uss\rangle \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Barione Ω^- : $|\Omega^-\rangle \equiv |sss\rangle$

A.2 Mesoni

A.2.1 Reazioni di produzione e decadimento

Particella	Produzione	Decadimento
π^-	$p + n \rightarrow p + p + \pi^-$	$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$; $\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$
π^0	$p + p \rightarrow p + p + \pi^0$	$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$; $\pi^0 \rightarrow \gamma + e^+ + e^-$
π^+	$p + p \rightarrow p + n + \pi^+$	$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$; $\pi^+ \rightarrow e^+ + \bar{\nu}_e$
K^+	$\pi^- + p \rightarrow n + K^+ + K^-$	$K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$; $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$; $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$
η	$\pi^+ + p \rightarrow p + \pi^+ + \eta$	$\eta \rightarrow \pi^+ + \pi^0 + \pi^- + \pi^+$; $\eta \rightarrow \gamma + \gamma$; $\eta \rightarrow 3\pi^0$
ρ^-	$\pi^- + p \rightarrow p + \rho^-$	$\rho^- \rightarrow \pi^+ - \pi^0$
ρ^0	$\gamma + p \rightarrow p + \rho^0$	$\rho^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$; $\rho^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^0$
ρ^+	$\pi^+ + p \rightarrow p + \rho^+$	$\rho^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$
ω	$\pi^+ + p \rightarrow p + \pi^+ + \omega$	$\omega \rightarrow \pi^+ + \pi^0 + \pi^+ + \pi^-$; $\omega \rightarrow \pi^0 + \gamma$

A.2.2 Proprietá fisiche

Particella	Stranezza (\mathcal{S})	Massa [Mev/ c^2]	J^Π	$T(T_3)$
π^+	0	135	0^-	1 (+1)
π^-	0	135	0^-	1 (-1)
π^0	0	139	0^-	1 (0)
K^+	1	493	0^-	1/2 (+1/2)
K^0	1	497	0^-	1/2 (-1/2)
η	0	549	0^-	0
ρ^+	0	770	1^-	1(1)
ρ^0	0	770	1^-	1(0)
ρ^-	0	770	1^-	1(-1)
ω	0	783	1^-	0

A.3 Barioni

A.3.1 Reazioni di produzione e decadimento

Particella	Produzione	Decadimento
Λ^0	$\pi^+ + n \rightarrow \Lambda^0 + K^+$	$\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$; $\Lambda^0 \rightarrow n + \pi^0$
Δ^{++}	$\pi^+ + p \rightarrow \Delta^{++}$	$\Delta^{++} \rightarrow p + \pi^+$
Δ^+	$\pi^+ + n \rightarrow \Delta^+$	$\Delta^+ \rightarrow n + \pi^+$
Δ^0	$\pi^- + p \rightarrow \Delta^0$	$\Delta^0 \rightarrow p + \pi^-$
Δ^-	$\pi^- + n \rightarrow \Delta^-$	$\Delta^- \rightarrow n + \pi^-$
Σ^-	$\pi^- + p \rightarrow K^+ + \Sigma^-$	$\Sigma^- \rightarrow n + \pi^-$
Σ^+	$K^- + p \rightarrow \Sigma^+ + \pi^-$	$\Sigma^+ \rightarrow p + \pi^0$; $\Sigma^+ \rightarrow n + \pi^+$
Σ^0		$\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$
Ξ^-	$K^- + p \rightarrow \Xi^- + K^+ \rightarrow$	$\Xi^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-$
Ξ^0		$\Xi^0 \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0$
Ω^-	$K^- + p \rightarrow \Omega^- + K^+ + K^0$	$\Omega^- \rightarrow \Lambda^0 + K^-$; $\Omega^- \rightarrow \Xi^0 + \pi^-$; $\Omega^- \rightarrow \Xi^- + \pi^0$

A.3.2 Proprietá fisiche

Particella	Stranezza (\mathcal{S})	Massa [Mev/ c^2]	J^Π	$T(T_3)$
Protone	0	938	$1/2^+$	$1/2(+1/2)$
Neutrone	0	939	$1/2^+$	$1/2(-1/2)$
Δ^{++}	0	1232	$3/2^+$	$3/2(+3/2)$
Δ^+	0	1232	$3/2^+$	$3/2(1/2)$
Δ^0	0	1232	$3/2^+$	$3/2(-1/2)$
Δ^-	0	1232	$3/2^+$	$3/2(-3/2)$
N^*	0	$1440 \div 1520$	$1/2^+$	$1/2$
Λ	-1	1116	$1/2^+$	0
Σ^+	-1	1189,4	$1/2^+$	$1(+1)$
Σ^0	-1	1192,6	$1/2^+$	$1(0)$
Σ^-	-1	1177,5	$1/2^+$	$1(-1)$
Ξ^-	-2	1321	$1/2^+$	$1/2(-1/2)$
Ξ^0	-2	1315	$1/2^+$	$1/2(+1/2)$
Ω^-	-3	1673	$3/2^+$	0
Σ^{*+}	-1	1382	$3/2^+$	$1(+1)$
Σ^{*0}	-1	1382	$3/2^+$	$1(+0)$
Σ^{*-}	-1	1387	$3/2^+$	$1(+1)$
Ξ^{*0}	-2	1532	$3/2^+$	$1/2(+1/2)$
Ξ^{*-}	-2	1535	$3/2^+$	$1/2(-1/2)$

A.4 Leptoni

Particella	Antiparticella	Massa [MeV/ c^2]	Carica	Spin	τ [s]	Decadimento
e^-	e^+	0,511	± 1	$1/2$		
ν_e	$\bar{\nu}_e$	$< 46 \text{ eV}/c^2$	0	$1/2$		
μ^-	μ^+	105,66	± 1	$1/2$	$2,20 \cdot 10^{-6}$	$\rightarrow e + \nu_e + \nu_\mu$
ν_μ	$\bar{\nu}_\mu$	0,50	0	$1/2$		
τ^-	τ^+	1784	± 1	$1/2$	$3,4 \cdot 10^{-13}$	$\rightarrow \mu + \nu_\mu + \nu_\tau; \rightarrow e + \nu_e + \nu_\tau$
ν_τ	$\bar{\nu}_\tau$	16,4	0	$1/2$		

Appendice B

Relazioni Fondamentali

B.1 Meccanica Quantistica

Propriet  degli operatori Riportiamo alcune propriet  fondamentali degli operatori utilizzati in meccanica quantistica.

- Prodotto : $fg\psi \equiv f(g\psi)$
- Commutatore : $[f, g] \equiv fg - gf \neq 0$ in generale.
 1. $[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0$.
 2. $[f, gh] = g[f, h] + [f, g]h$.
 3. $[fg, h] = f[g, h] + [f, h]g$.
 4. $[f, g]^\dagger = -[f, g]$.
 5. $[x, \frac{d}{dx}]f(x) = -f(x)$, per ogni $f(x)$.
 6. $[f, g^k] = \frac{dg^k}{dg}$.
 7. In particolare $[x, f(p)] = i\hbar \frac{df}{dp}$ e $[p, f(x)] = -i\hbar \frac{df}{dx}$.
 8. Se $[f, g] = c$ allora $[e^{\lambda f}, g] = \lambda c e^{\lambda f}$.
- Se due operatori f, g commutano allora esiste una base di stati ortonormali e completi $\{\psi_n\}$ tali che $f\psi_n = f_n\psi_n$ e $g\psi_n = g_n\psi_n$. Ovvero esistono autostati *simultanei* di f e g . I due operatori sono quindi due quantit  fisiche compatibili che possano assumere simultaneamente valori ben definiti.

Operatori di p e q Gli operatori di posizione e di impulso sono definiti rispettivamente da

- $\hat{q}\psi(q, t) = q\psi(q, t) \Rightarrow \hat{q} \rightarrow q$
- $\hat{p}\psi(q, t) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}\psi(q, t) \Rightarrow \hat{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}$

Indeterminazione di Heisenberg $\Delta q \cdot \Delta p \geq \hbar/2$, ovvero non si possono misurare con la stessa precisione sia la posizione che l'impulso di una particella (pacchetto d'onda). Il pacchetto d'onda Gaussiano minimizza questa relazione di indeterminazione.

Evoluzione di un sistema isolato L'evoluzione di un sistema isolato si ricava dall'*equazione di Schroedinger indipendente dal tempo*

$$i\hbar \frac{d}{dt}\psi(q, t) = \hat{H}(\hat{q}, \hat{p}, t)\psi(q, t) \quad (B.1)$$

\hat{H}   definito come operatore Hamiltoniano : $\hat{H}(\hat{q}, \hat{p}, t)$.

Evoluzione di un sistema isolato (non dipendente dal tempo)

$$\begin{cases} i\hbar\partial_t\psi_n(q,t) = \hat{H}(\hat{q},\hat{p},t)\psi_n(q,t) \\ H\psi_n = E_n\psi_n \end{cases} \Rightarrow i\hbar\partial_t\psi_n = E_n\psi_n \quad (\text{B.2})$$

Quindi $\boxed{\psi_n(t) = e^{-iE_nt/\hbar}\psi_n(0)}$.

Equazione di Schroedinger 1 dimensionale

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right)\psi(x) = E\psi(x) \quad (\text{B.3})$$

Questa equazione differenziale deve essere risolta

1. Trovando i valori E_n per cui esistono soluzioni (ricerca dello spettro)
2. Trovando le ψ_n , autofunzioni relative agli E_n , con le condizioni
 - (a) $\|\psi(x)\| = 1 \Rightarrow$ stati legati, ovvero autovalori E_n discreti.
 - (b) Altrimenti se $\|\psi(x)\| > +\infty$ basta richiedere che ψ si mantenga limitata all'infinito (parte continua dello spettro), ovvero che appartenga all'insieme $S = \{\psi(x) : \lim_{|x|\rightarrow\infty} x^N \cdot \psi(x) = 0, \forall N\}$.

Buche di potenziale Si risolve l'equazione di Schroedinger in tutto lo spazio rispettando le condizioni al contorno.

1. Buca infinitamente alta

$$\psi = \begin{cases} 0, & \text{fuori dalla buca} \\ \sin(kx), & \text{dentro la buca} \end{cases} \quad k = n\pi/a \Rightarrow E_n = \frac{k_n^2\hbar^2}{2m} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2 \quad (\text{B.4})$$

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi n}{a} x \quad (\text{B.5})$$

2. Buca di profondità finita : Gli stati legati soddisfano il sistema

$$\begin{cases} \xi \tan \xi = \eta, & n \text{ pari} \\ \xi \cot \xi = -\eta, & n \text{ dispari} \\ \xi^2 + \eta^2 = \frac{ma^2V_0}{2\hbar^2} \end{cases}, \text{dove } \xi \equiv \frac{\sqrt{2m(V_0 - |E|E)}}{2\hbar}a \text{ e } \eta \equiv \frac{\sqrt{2m|E|}}{2\hbar}a \quad (\text{B.6})$$

Si risolve graficamente.

Oscillatore Armonico L'Hamiltoniana é $H = p^2/2m + m\omega^2x^2/2$, quindi bisogna risolvere

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - m\omega^2x^2/2)\psi = 0$$

. Si ricavano gli autovalori

$$E_n = \frac{\omega\hbar}{2}(2n+1) = \omega\hbar(n+1/2)$$

. La funzione d'onda dell' n -esimo stato é data da

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} \left(\frac{1}{2^n n!}\right)^{1/2} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

Operatori di creazione e distruzione Si definiscono rispettivamente l'operatore di distruzione e creazione come

$$\begin{cases} a \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}p \\ a^\dagger \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}p \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

Invertendo gli operatori si ha

$$\begin{cases} x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger) \\ p = -i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(a - a^\dagger) \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

Applicando questo operatore allo staton-esimo si ha ($\psi_n \equiv n$)

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle ; a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle.$$

Processo d'urto Processo in cui una particella libera attraversa una zona di potenziale che varia con la posizione. La funzione d'onda subisce quindi una modificazione nel passaggio. L'onda *incidente* $\psi_{\vec{k}} = A e^{i\vec{k}\vec{x}}$, $A = m/\hbar|\vec{k}|$ viene divisa in onda *riflessa* $\propto e^{-ikx}$ e onda *trasmessa* $\propto e^{ikx}$.

Barriera di potenziale In questa condizione il potenziale é dato da

$$V = \begin{cases} 0, & \text{per } x < 0, x > a \\ V_0 > 0, & \text{per } 0 \leq x \leq a \end{cases}$$

1. Se $E > V_0$ le soluzioni sono

$$\psi_I = e^{ikx} + A e^{-ikx} \text{ con } k = \sqrt{2mE}/\hbar \quad (\text{B.9})$$

$$\psi_{II} = B e^{ik'x} + B' e^{-ik'x} \text{ con } k' = \sqrt{2m(E - V_0)}/\hbar \quad (\text{B.10})$$

$$\psi_{III} = C e^{ikx} \text{ solo onda trasmessa} \quad (\text{B.11})$$

Imponendo la continuit  si ricava

$$D \equiv \frac{|J_{tras}|}{|J_{inc}|} = \frac{4k^2 k'^2}{4k^2 k'^2 + (k^2 - k'^2)^2 \sin^2(k'a)} \quad (\text{B.12})$$

$$R \equiv \frac{|J_{rifl}|}{|J_{inc}|} = \frac{(k^2 - k'^2)^2 \sin^2 k'a}{4k^2 k'^2 + (k^2 - k'^2)^2 \sin^2 k'a} \quad (\text{B.13})$$

(a) $D + R = 1$ e $D \neq 0$: diversamente da quanto succede classicamente c'  la possibilit  che la particella attraversi la barriera (*effetto tunnel*).

(b) Per $E \gg V_0$, $D \rightarrow 1, R \rightarrow 0$.

(c) Per $\sqrt{2m(E - V_0)}a/\hbar = n\pi$ $D = 1$.

2. Se $E < V_0$ le soluzioni sono

$$\psi_I = e^{ikx} + A e^{-ikx} \quad (\text{B.14})$$

$$\psi_{II} = B e^{-\kappa x} + B' e^{\kappa x} \text{ con } \kappa \equiv \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar \quad (\text{B.15})$$

$$\psi_{III} = C e^{ikx} \quad (\text{B.16})$$

Quindi

$$D = \frac{4k^2\kappa^2}{4k^2\kappa^2 + (k^2 + \kappa^2)^2 \sinh^2 \kappa a} \quad (\text{B.17})$$

$$R = \frac{(k^2 + \kappa^2)^2 \sinh^2 \kappa a}{4k^2\kappa^2 + (k^2 + \kappa^2)^2 \sinh^2 \kappa a} \quad (\text{B.18})$$

(a) $D > 0$ sempre.

(b) Se $V_0 \rightarrow \infty$ o $a \rightarrow \infty$ allora $D \sim e^{-2\sqrt{2m(V_0-E)}a/\hbar}$.

(c) Lo spostamento di coordinate provoca la comparsa di una fase.

Gradino di potenziale Il potenziale in questo caso si esprime come

$$V = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ V_0 & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{B.19})$$

1. Se $E < V_0$ le soluzioni sono date da

$$\psi_I = e^{ikx} + A e^{-ikx} \quad \text{con } k = \sqrt{2mE}/\hbar \quad (\text{B.20})$$

$$\psi_{II} = C e^{-\kappa x} \quad \text{con } \kappa = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar \quad (\text{B.21})$$

In questo caso $R = 1$ e $D = 0$.

2. Se $E > V_0$ si hanno le soluzioni

$$\psi_I = e^{ikx} + A e^{-ikx} \quad \text{con } k = \sqrt{2mE}/\hbar \quad (\text{B.22})$$

$$\psi_{II} = C e^{ik'x} \quad \text{con } k' = \sqrt{2m(E - V_0)}/\hbar \quad (\text{B.23})$$

Ponendo le condizioni al contorno si ricava

$$D = \frac{4kk'}{(k + k')^2} \quad (\text{B.24})$$

$$R = \frac{(k - k')^2}{(k + k')^2} \quad (\text{B.25})$$

Buca di potenziale δ In questo caso $V(x) = -g\delta(x)$ con $g > 0$. Le condizioni al contorno da porre sono

$$\begin{cases} \psi(0_-) = \psi(0_+) \equiv \psi(0) \\ \psi'(0_+) - \psi'(0_-) = -\frac{2mg}{\hbar^2} \psi(0) \end{cases} \quad (\text{B.26})$$

1. Se $E < 0$ (spettro discreto)

$$\psi(x) = \sqrt{k} \left(\vartheta(x) e^{kx} + \vartheta(x) e^{-kx} \right) \quad \text{con } k \equiv \sqrt{\frac{-2mE_0}{\hbar^2}}$$

2. Se $E \geq 0$ (spettro continuo)

$$\psi(x) = \vartheta(-x) \left[A e^{ik'x} + B e^{-ik'x} \right] + \vartheta(x) \left[C e^{ik'x} + D e^{-ik'x} \right]$$

con $k' = \sqrt{2mE}/\hbar$. Le ampiezze sono legate dalla matrice di transizione

$$\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + i\alpha & i\alpha \\ -i\alpha & 1 - i\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad (\text{B.27})$$

Barriera di potenziale δ È simile al caso precedente, ma stavolta $g < 0$. Non ci sono stati legati e lo stato di diffusione generale è espresso dalla stessa ψ con i coefficienti del caso precedente.

$$D = \frac{1}{1 + \alpha^2} \quad (\text{B.28})$$

$$R = \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2} \quad (\text{B.29})$$

Momento angolare Si definisce il momento angolare classicamente ma utilizzando la formula quantistica per l'impulso.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = -i\hbar(\vec{r} \times \vec{\nabla}) \quad (\text{B.30})$$

Separando le componenti si ha

$$\begin{cases} L_x = -i\hbar(y\partial_z - z\partial_y) \\ L_y = -i\hbar(z\partial_x - x\partial_z) \\ L_z = -i\hbar(x\partial_y - y\partial_x) \end{cases} \quad (\text{B.31})$$

Ovvero

$$L_i = \varepsilon_{ijk} x_j p_k \text{ dove } \varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} 1 \text{ se } (ijk) = (123), (231), (312) \\ -1 \text{ se } (ijk) = (321), (132), (213) \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases} \quad (\text{B.32})$$

Commutatori Valgono i seguenti commutatori

$$[L_i, L_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}L_k \implies \begin{cases} [L_1, L_2] = i\hbar L_3 \\ [L_2, L_3] = i\hbar L_1 \\ [L_3, L_1] = i\hbar L_2 \end{cases} \quad (\text{B.33})$$

- Le componenti del momento angolare sono operatori Hermitiani.

$$\begin{cases} [L_i, x_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}x_k \\ [L_i, p_j] = i\hbar\varepsilon_{jik}p_k \end{cases} \quad (\text{B.34})$$

- Se si definisce $\vec{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ allora $[\vec{L}^2, L_i] = 0$ per $i = 1, 2, 3$
- \vec{L}^2 ed L_3 possono avere simultaneamente misure definite

Momento angolare orbitale In generale il momento angolare totale si indica con \vec{J} ed è composto dallo spin, S e dal momento angolare orbitale, L . Per J valgono le stesse proprietà già dimostrate per L .

Operatori di salita e discesa per L Si possono definire gli operatori di salita e discesa seguenti.

$$\begin{cases} L_+ \equiv L_1 + iL_2 \\ L_- \equiv L_1 - iL_2 \end{cases} \quad (\text{B.35})$$

Valgono le seguenti proprietà , di immediata verifica.

$$\begin{cases} [L_+, L_-] = 2L_3 \\ [L_3, L_+] = L_+ \\ [L_3, L_-] = -L_- \end{cases} ; L^2 = L_+L_- + L_3^2 - L_3 = L_-L_+ + L_3^2 + L_3 \quad (\text{B.36})$$

Matrici di Pauli Per le particelle a spin $1/2$, $j = 1/2$ si possono definire le matrici di Pauli , che rappresentano l'insieme degli elementi di matrice di J_i .

$$\sigma_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \sigma_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} ; \sigma_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.37})$$

Le matrici di Pauli godono delle seguenti proprietà

- $[\sigma_i/2, \sigma_j/2] = i\varepsilon_{ijk}\sigma_k/2$
- $\sigma_i^2 = \mathbb{I}$
- $\sigma_i\sigma_j = -\sigma_j\sigma_i = i\varepsilon_{ijk}\sigma_k (i \neq j)$

Spinori Vengono definiti due spinori di base

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |1/2, 1/2\rangle \equiv |\uparrow\rangle ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1/2, -1/2\rangle \equiv |\downarrow\rangle \quad (\text{B.38})$$

attraverso i quali si possono scrivere tutti gli elementi dello spazio , indicati con

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.39})$$

Composizione dei momenti angolari Dato un sistema formato da due particelle con stati $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ la funzione d'onda del sistema é data da (considerando stati puri) $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle|\psi_2\rangle$. I momenti angolari si sommano

$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 ; [J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k$$

Per studiare gli autovalori si possono scegliere due basi

1. La base in cui sono diagonali $J_1^2, J_2^2, J_{1z}, J_{2z}$.

- Si scelgono i vettori di base $|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$
- Valgono le equazioni agli autovalori

$$\begin{cases} J_1^2|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle = j_1(j_1 + 1)\hbar^2|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle \\ J_{1z}|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle = m_1\hbar|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle \end{cases} \quad (\text{B.40})$$

e analogamente per J_2^2 e J_{2z} .

2. La base in cui sono diagonali J_1^2, J_2^2, J^2, J_z

- Si scelgono i vettori di base $|j_1, j_2, J, M\rangle$

- Valgono le equazioni agli autovalori

$$\begin{cases} J_1^2 |j_1, j_2, J, M\rangle = j_1(j_1 + 1)\hbar^2 |j_1, j_2, J, M\rangle \\ J_2^2 |j_1, j_2, J, M\rangle = j_2(j_2 + 1)\hbar^2 |j_1, j_2, J, M\rangle \\ J^2 |j_1, j_2, J, M\rangle = J(J + 1)\hbar^2 |j_1, j_2, J, M\rangle \\ J_z |j_1, j_2, J, M\rangle = M\hbar |j_1, j_2, J, M\rangle \end{cases} \quad (\text{B.41})$$

Segue

Autovalori M di J_z Poiché $J_z = J_{1z} + J_{2z} \Rightarrow M = m_1 + m_2$. Quindi all'autovalore m_1 sono associati $(2j_1 + 1)$ valori, mentre ad m_2 corrispondono $(2j_2 + 1)$ autovalori : in totale $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$

Autovalori J di J^2 Il valore massimo dei due momenti angolare é tale che $J = j_1 + j_2$: j_1 e j_2 assumono il valore della proiezione del momento angolare m_1, m_2 . Quindi $|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle \longleftrightarrow |j_1, j_2, J = j_1 + j_2, M = m_1 + m_2\rangle$. Il valore minimo possibile di J é $|j_1 - j_2|$, ovvero J può assumere i valori

$$J = j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \dots, |j_1 - j_2|$$

Coefficienti di Clebsch-Gordan Sono necessari per passare tra le due basi del momento angolare. Per ottenerli basta sviluppare gli stati di una base in termine dell'altra base e viceversa.

$$|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle = \sum_{J, M} |j_1, j_2, J, M\rangle \langle j_1, j_2, J, M | j_1, j_2, m_1, m_2\rangle \quad (\text{B.42})$$

$$|j_1, j_2, J, M\rangle = \sum_{m_1, m_2} |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle \langle j_1, j_2, m_1, m_2 | j_1, j_2, J, M\rangle \quad (\text{B.43})$$

Vale ovviamente

$$\langle j_1, j_2, J, M | j_1, j_2, m_1, m_2\rangle = \langle j_1, j_2, m_1, m_2 | j_1, j_2, J, M\rangle^* \quad (\text{B.44})$$

Spin Rappresenta il momento angolare intrinseco delle particelle (non é legato alla massa delle particelle). Per le particelle che possiedono spin non nullo la descrizione dello stato attraverso la funzione d'onda deve poter determinare la probabilità che lo spin della particella abbia direzione definita nello spazio.

$$\psi(\vec{r}) = \psi(\vec{r}, s) = \begin{pmatrix} \psi_1(\vec{r}) \\ \vdots \\ \psi_{2s+1}(\vec{r}) \end{pmatrix} \quad (\text{B.45})$$

Spin 1/2 Gli operatori si scrivono come

$$\begin{cases} S^2 = \hbar^2 s(s + 1) = \hbar^2 3/4 \\ S_i = \sigma_i \hbar / 2 \end{cases} \quad (\text{B.46})$$

$$S_{\pm} = S_x \pm iS_y \Rightarrow S_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; S_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.47})$$

Valgono le proprietà

$$e^{i\vec{a}\cdot\vec{\sigma}} = \cos |\vec{a}| + i \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \vec{\sigma} \sin |\vec{a}| \quad (\text{B.48})$$

$$\vec{n} \cdot \vec{s} = \frac{1}{2} \vec{n} \cdot \vec{\sigma} \quad (\text{B.49})$$

Problemi 3-dimensionali Si risolvono introducendo le nuove variabili

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \\ \vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \end{cases} \quad (\text{B.50})$$

L'Hamiltoniana si trasforma quindi in

$$H = -\frac{\hbar^2}{2(m_1 + m_2)} \nabla_R^2 - \frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 + V(\vec{r}) \quad (\text{B.51})$$

Dunque la funzione d'onda si divide in

$$\psi = \Phi(\vec{r}) \phi(\vec{r})$$

Simmetria Centrale Nel caso di simmetria centrale $V(\vec{r}) = V(r)$. Si cercano quindi soluzioni della forma $\psi(\vec{r}) = R(r)Y_{\ell,m}(\vartheta, \varphi)$, composte da parte radiale e parte angolare con armoniche sferiche. Per la parte radiale si deve risolvere l'equazione

$$\left\{ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(r)) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right\} R(r) = 0 \quad (\text{B.52})$$

che si risolve facilmente introducendo $\chi(r) \equiv R(r)r$. Si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} \frac{d^2 \chi}{dr^2} + \left\{ \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(r)) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right\} \chi(r) = 0 \\ \int_0^\infty dr |\chi|^2 = 1 \\ \chi(0) = 0 \end{cases} \quad (\text{B.53})$$

Dunque ogni stato stazionario di un sistema 3D a simmetria centrale é identificato dalla terna di numeri quantici (n, ℓ, m) .

Particella libera Si consideri il caso $V = 0, \forall r$. Si ottiene l'equazione

$$R'' + \frac{2}{r} R' + \left(k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) R = 0 ; k^2 = 2mE/\hbar^2 \quad (\text{B.54})$$

- Se $\ell = 0$ allora sono soluzioni le ONDE PIANE

$$\begin{cases} R = \frac{\sin kr}{r} \text{ regolare in } 0 \\ R = A' \frac{\cos kr}{r} \text{ singolare in } 0 \end{cases} \quad (\text{B.55})$$

- Se $\ell \neq 0$ si pone $R_\ell = r^\ell \eta_\ell$ e si risolve

$$\eta_\ell'' + \frac{2(\ell+1)}{r} \eta_\ell' + k^2 \eta_\ell = 0$$

Sono soluzioni le ONDE SFERICHE

$$\begin{cases} R_{k,\ell} = 2k j_\ell(kr) \\ Q_{k,\ell} = 2kn_\ell(kr) \end{cases} \quad (\text{B.56})$$

dove si sono definite le funzioni di Bessel sferiche $j_\ell(kr)$ e $n_\ell(kr)$.

Funzioni di Bessel-Hankel Si definiscono le funzioni di Bessel sferiche

$$\begin{cases} j_\ell(x) = (-1)^\ell x^\ell \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^\ell \frac{\sin x}{x} \\ n_\ell(x) = (-1)^{\ell+1} x^\ell \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^\ell \frac{\cos x}{x} \end{cases} \quad (\text{B.57})$$

- Per $x \rightarrow 0$,

$$j_\ell(x) \sim \frac{x^\ell}{(2\ell+1)!!} ; n_\ell \sim \frac{(2\ell-1)!!}{x^{\ell+1}}$$

- Per $x \rightarrow \infty$,

$$j_\ell(x) \sim \frac{1}{x} \cos x - \frac{(\ell+1)\pi}{2} ; n_\ell \sim \frac{1}{x} \sin x - \frac{(\ell+1)\pi}{2}$$

Sono utili anche le seguenti definizioni di funzioni di Hankel sferiche

$$\begin{cases} h_\ell^{(1)}(x) \equiv j_\ell(x) + i n_\ell(x) \\ h_\ell^{(2)}(x) \equiv j_\ell(x) - i n_\ell(x) \end{cases} \quad (\text{B.58})$$

Gli andamenti asintotici si ottengono utilizzando le funzioni di Bessel.

Sviluppo in onde parziali Le soluzioni per momenti angolari diversi si possono correlare tra di loro : un'onda piana si può sempre sviluppare in termine di onde sferiche utilizzando

$$e^{ikz} = e^{ikr \cos \vartheta} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i^\ell j_\ell(kr) P_\ell(\cos \vartheta) \quad (\text{B.59})$$

Buca 3D Prendiamo il potenziale a simmetria centrale

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} -V_0 & \text{se } r < a \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (\text{B.60})$$

Si risolve l'equazione di Schroedinger , trovando le soluzioni

- Per $r < a$

$$R_\ell^{(int)} = A j_\ell(kr) \text{ con } k \equiv \frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2} > 0 \quad (\text{B.61})$$

- Per $r > a$

$$R_\ell^{(ext)} = B h_\ell^{(1)}(ikr) \text{ con } k' = \frac{i\sqrt{-2mE}}{\hbar} \equiv i\kappa \quad (\text{B.62})$$

Analogamente a quanto fatto per la buca unidimensionale si risolve l'equazione graficamente trovando che

- Per $\sqrt{2mV_0a^2}/\hbar \leq \pi/2$ non ci sono stati legati
- Per $\pi/2 \leq \sqrt{2mV_0a^2}/\hbar \leq 3\pi/2$ c'è un solo stato legato
- Per $3\pi/2 \leq \sqrt{2mV_0a^2}/\hbar \leq 5\pi/2$ ci sono 2 livelli discreti

Atomo di Idrogeno L'Hamiltoniana dell'atomo di idrogeno si può scrivere come

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{e^2}{r} \text{ con } m \simeq m_e \quad (\text{B.63})$$

L'equazione da risolvere é dunque

$$R'' + \frac{2}{r}R' - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}R + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right)R = 0 \quad (\text{B.64})$$

- Gli stati legati sono possibili solo con $E < 0$.
- La soluzione dell'equazione con il metodo delle serie di potenze porta alla condizione di quantizzazione dell'energia

$$E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2n^2} = \frac{e^2}{2n^2r_B} \text{ con } r_B \equiv \frac{\hbar^2}{me^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{B.65})$$

- L'n-esimo livello é $\sum_{\ell=0}^{(n-1)} 2\ell + 1 = n^2$ volte degenerare.
- La soluzione per l'equazione radiale é data da

$$R_{n,\ell} = C_{n,\ell} \left(\frac{2}{nr_B}\right)^\ell r^\ell e^{-r/nr_B} L_{n+\ell}^{2\ell+1} \left(\frac{2r}{nr_B}\right) \quad (\text{B.66})$$

ove

$$C_{n,\ell} = -\frac{2}{n^2} r_B^{-3/2} \sqrt{\frac{(n-\ell-1)!}{\{n+\ell\}!^3}} \quad (\text{B.67})$$

e $L_{n+\ell}^{2\ell+1}$ sono i polinomi associati di Laguerre.

Per i primi stati

- $R_{1,0}(r) = 2r_B^{-3/2} e^{-r/r_B}$
- $R_{2,0}(r) = \frac{1}{2\sqrt{2}} r_B^{-3/2} \left(2 - \frac{r}{r_B}\right) e^{-r/2r_B}$
- $R_{2,1}(r) = \frac{1}{2\sqrt{6}} r_B^{-3/2} \frac{r}{r_B} e^{-r/2r_B}$

Dal modello quantistico si ricava che il moto dell'elettrone nel nucleo é non relativistico ($v \simeq c/137$) e che l'energia di ionizzazione é di circa 14eV

Appendice C

Equazioni di Lane Emden

Viene presentato un articolo in cui le equazioni di Lane Emden vengono risolte analiticamente.

23 Lecture 23: The Lane-Emden Equation

“Science is facts; just as houses are made of stones, so is science made of facts; but a pile of stones is not a house and a collection of facts is not necessarily science.”

Henri Poincare

The Big Picture: Today we discuss the Lane-Emden equation, which describes polytropes in hydrostatic equilibrium as simple models of a star. We also derive the Chandrasekhar limit for the formation of a black hole.

The Lane-Emden Equation

Last time we introduced the polytropes as a family of equations of state for gas in hydrostatic equilibrium. They are given by the equation of state in which the pressure is given as a power-law in density:

$$P = \kappa \rho^\gamma, \quad (462)$$

where κ and γ are constants. The *Lane-Emden equation* combines the above equation of state for polytropes and the equation of hydrostatic equilibrium

$$\frac{dP}{dr} = -\rho(r) \frac{GM(r)}{r^2}. \quad (463)$$

If we solve for the equation above for $M(r)$

$$M(r) = -\frac{r^2}{\rho G} \frac{dP}{dr} \quad \implies \quad \frac{dM}{dr} = -\frac{1}{G} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right), \quad (464)$$

and compare it to what we obtain from considering the spherical shell in hydrostatic equilibrium

$$dM = 4\pi r^2 \rho dr \quad \implies \quad \frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \quad (465)$$

we obtain

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dr} &= -\frac{1}{G} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = 4\pi r^2 \rho, \\ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) &= -4\pi G \rho. \end{aligned} \quad (466)$$

After inserting the polytropic equation of state [eq. (462)], the equation above becomes

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \kappa \gamma \rho^{\gamma-1} \frac{d\rho}{dr} \right) = -4\pi G \rho. \quad (467)$$

After defining quantities

$$\begin{aligned} \rho &\equiv \lambda \theta^n, \\ \gamma &\equiv \frac{n+1}{n}, \end{aligned} \quad (468)$$

the eq. (467) becomes

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[\frac{\kappa r^2}{\lambda \theta^n} \frac{n+1}{n} (\lambda \theta^n)^{1/n} \frac{d(\lambda \theta^n)}{dr} \right] &= -4\pi G \lambda \theta^n \\ \left[\frac{n+1}{4\pi G} \kappa \lambda^{\frac{1-n}{n}} \right] \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\theta}{dr} \right) &= -\theta^n. \end{aligned} \quad (469)$$

We now make this equation dimensionless by introducing a radial variable ξ

$$\begin{aligned} \xi &\equiv \frac{r}{\alpha}, \\ \alpha &\equiv \sqrt{\frac{n+1}{4\pi G} \kappa \lambda^{\frac{1-n}{n}}}, \end{aligned} \quad (470)$$

to finally obtain the *Lane-Emden* equation for polytropes in hydrostatic equilibrium:

$$\begin{aligned} \alpha^2 \frac{1}{(\alpha \xi)^2} \frac{d}{d(\alpha \xi)} \left((\alpha \xi)^2 \frac{d\theta}{d(\alpha \xi)} \right) &= -\theta^n \\ \Rightarrow \frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) &= -\theta^n \end{aligned} \quad (471)$$

This is a second order ordinary differential equation, which means that it requires two boundary conditions in order to be well-defined:

1. Define the central density $\rho_c \equiv \lambda$. Then

$$\rho = \lambda \theta^n \quad \Rightarrow \quad \theta(0) = 1. \quad (472)$$

2. At $r = 0$, $\frac{dP}{dr} = -\rho g = -\rho_c g = 0$, because $g_c = 0$ (there is no mass inside zero radius). Therefore,

$$\frac{dP}{dr} = \kappa \gamma \rho^{\gamma-1} \frac{d\rho}{dr} \propto \frac{d\theta}{d\xi} \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{d\theta}{d\xi} \right|_{\xi=0} = 0. \quad (473)$$

Analytic Solutions of the Lane-Emden Equation

The Lane-Emden equation can be analytically solved only for a few special, integer values of the index n : 0, 1 and 5. For all other values of n , we must resort to numerical solutions. However, it is beneficial from both pedagogical and intuitive standpoint to derive these analytical solutions, which is what we do next.

Analytic solution for $n=0$.

After substituting $n = 0$ into the Lane-Emden equation [eq. (471)], we obtain

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) &= -1 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) d\xi = - \int \xi^2 d\xi \\ \Rightarrow \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} &= -\frac{1}{3} \xi^3 + c_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\theta}{d\xi} = -\frac{1}{3} \xi + \frac{c_1}{\xi^2}. \end{aligned} \quad (474)$$

But, using the boundary conditions, we obtain

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\theta}{d\xi} \right|_{\xi=0} = 0 &\implies c_1 = 0 \implies \frac{d\theta}{d\xi} = -\frac{1}{3}\xi \implies \theta = -\frac{1}{6}\xi^2 + c_2 \\ \implies \theta(0) = 1 &\implies c_2 = 1 \implies \theta_0 = 1 - \frac{1}{6}\xi^2. \end{aligned} \quad (475)$$

From the equation above, we see that this configuration has a boundary at $\xi = \sqrt{6}$, where $\theta_0 \rightarrow 0$.

Analytic solution for $n=1$.

After substituting $n = 1$ into the Lane-Emden equation [eq. (471)], we obtain

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta \implies \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\xi^2 \theta. \quad (476)$$

Introduce the variable χ

$$\chi(\xi) \equiv \xi \theta(\xi) \implies \theta \equiv \frac{\chi}{\xi}. \quad (477)$$

Then

$$\frac{d\theta}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\chi}{\xi} \right) = \frac{\xi \chi' - \chi}{\xi^2}, \quad (478)$$

and the Lane-Emden equation in eq. (476) becomes

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) &= \frac{d}{d\xi} (\xi \chi') = \chi' + \xi \chi'' - \chi' = \xi \chi'' \\ \implies \frac{\xi \chi''}{\xi^2} &= -\frac{\chi}{\xi} \implies \chi'' = -\chi \implies \chi'' + \chi = 0. \end{aligned} \quad (479)$$

This is a harmonic oscillator with general solutions

$$\chi(\xi) = A \sin \xi + B \cos \xi, \quad (480)$$

or, in terms of $\theta \equiv \chi/\xi$

$$\theta(\xi) = A \frac{\sin \xi}{\xi} + B \frac{\cos \xi}{\xi}, \quad (481)$$

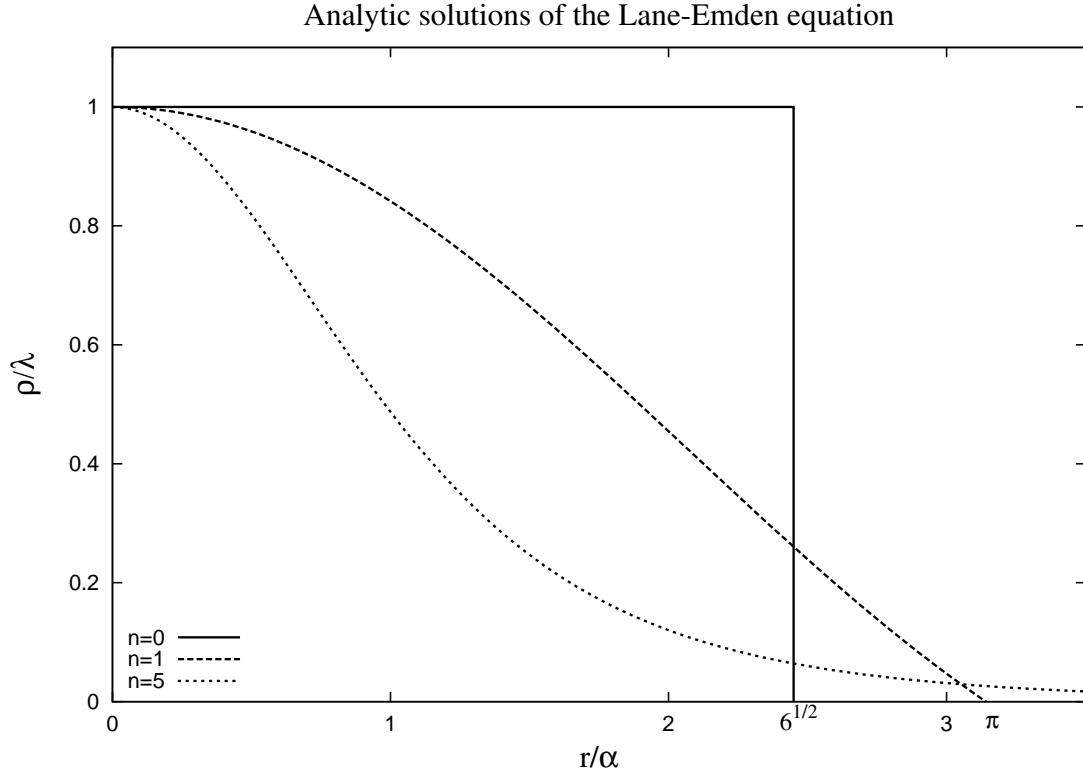
After imposing the first boundary condition, the general solution is obtained:

$$\begin{aligned} \theta(0) = 1 &\implies B = 0, \quad \text{because } \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\cos \xi}{\xi} = \infty \\ A &= 1, \quad \text{because } \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\sin \xi}{\xi} = 1. \\ \implies \theta_1(\xi) &= \frac{\sin \xi}{\xi}. \end{aligned} \quad (482)$$

The second boundary condition $\left. \frac{d\theta}{d\xi} \right|_{\xi=0} = 0$ is explicitly satisfied, because, after applying L'Hospital's rule

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\xi \cos \xi - \sin \xi}{\xi^2} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{-\xi \sin \xi + \cos \xi - \cos \xi}{2\xi} = -\frac{1}{2} \lim_{\xi \rightarrow 0} \sin \xi = 0, \quad (483)$$

as required. From the eq. (482) above, we see that this configuration has a boundary at $\xi = \pi$, where $\theta_1 \rightarrow 0$.



Analytic solution for $n=5$.

The solution of Lane-Emden equation with $n = 5$ is analytically tractable, yet quite complicated to integrate. The solution is

$$\theta_5(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}\xi^2}}. \quad (484)$$

This configuration is unbounded: $\xi \in [0, \infty)$, and $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \theta_5 = 0$.

[For explicit derivation, see S. Chandrasekhar's *An Introduction to the Study of Stellar Structure* (University of Chicago Press, Chicago, 1939), p. 93-94]

The Chandrasekhar Mass Limit

Consider a star which has, through gravitational contraction, become so dense that it is supported by a completely degenerate, extreme relativistic electron gas (*i.e.*, $\rho > 10^7 \text{ g cm}^{-3}$). The pressure in terms of the density is obtained by combining the eq. (436)

$$P = \frac{hc}{8} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} n^{4/3} \quad (485)$$

and

$$n = \frac{\rho}{m_H \bar{\mu}}, \quad (486)$$

to obtain

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{hc}{8} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} \left(\frac{\rho}{m_H \bar{\mu}_e} \right)^{4/3} \\
 &= \frac{(6.63 \times 10^{-27} \text{ erg s}) (3 \times 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{s}})}{8} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} \frac{1}{(1.67 \times 10^{-24} \text{ g})^{4/3}} \left(\frac{\rho}{\bar{\mu}_e} \right)^{4/3} \\
 \Rightarrow P &= 1.24 \times 10^{15} \left(\frac{\rho}{\bar{\mu}_e} \right)^{4/3}, \tag{487}
 \end{aligned}$$

which is an equation of state for a polytrope with $\gamma = 4/3$ and $\kappa = \frac{1.24 \times 10^{15}}{\bar{\mu}_e^{4/3}}$. Corresponding value of the index $n = \frac{1}{\gamma-1}$ is $n = 3$.

The mass corresponding to this polytropic configuration can be computed as follows:

$$\begin{aligned}
 M_3 &= \int_0^{r_{\max}} \rho(r) d^3r = 4\pi \int_0^{r_{\max}} \lambda \rho(r) r^2 dr = 4\pi \int_0^{\xi_{\max}} \lambda \theta^3 (\alpha \xi)^3 d(\alpha \xi) \\
 &= 4\pi \lambda \alpha^3 \int_0^{\xi_{\max}} \left[-\frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) \right] d\xi \\
 &= 4\pi \lambda \alpha^3 \left[-\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right]_{\xi_{\max}}, \tag{488}
 \end{aligned}$$

where we have used the Lane-Emden equation in eq. (471). The constant λ is defined in eq. (470), and for $n = 3$ is

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \sqrt{\frac{n+1}{4\pi G} \kappa \lambda^{\frac{1-n}{n}}} \Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{\kappa}{\pi G} \kappa \lambda^{\frac{-2}{3}}} \\
 \Rightarrow \lambda \alpha^3 &= \lambda \left[\frac{\kappa}{\pi G} \lambda^{\frac{-2}{3}} \right]^{3/2} = \left[\frac{\kappa}{\pi G} \right]^{3/2}. \tag{489}
 \end{aligned}$$

The term in brackets can be evaluated numerically (Table 4.2 of *Astrophysics I: Stars* by Bowers & Deeming) to about 2.02, so the total mass is

$$\begin{aligned}
 M_3 &= 4\pi \left[\frac{\frac{1.24 \times 10^{15}}{\bar{\mu}_e^{4/3}}}{\pi (6.67 \times 10^{-8})} \right]^{3/2} 2.02 = 4\pi \left[\frac{1.24 \times 10^{15}}{\pi (6.67 \times 10^{-8})} \right]^{3/2} \frac{2.02}{\bar{\mu}_e^2} \\
 &= \frac{1.16 \times 10^{34}}{\bar{\mu}_e^2} \text{ g} = \frac{1.16 \times 10^{34}}{\bar{\mu}_e^2} \frac{M_{\odot}}{1.99 \times 10^{33}} \\
 \Rightarrow M_3 &= \frac{5.81}{\bar{\mu}_e^2} M_{\odot}. \tag{490}
 \end{aligned}$$

Let us now compute $\bar{\mu}_e$ for a star with relativistic matter degeneracy. In such a star, it is convenient to define the matter density, due essentially to the ions, as $\rho = m_H \mu_e n_e$. Also, let us consider contribution from hydrogen (subscript H), helium (He) and elements with atomic weight greater than 4 (Z). Then, from the definition in eq. (439), we have

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\bar{\mu}_e} &= \sum_i \frac{m_H}{m_e} \bar{n}_i^e = \frac{m_H}{m_e} \sum_i \bar{n}_i^e = \frac{m_H}{m_e} \left[\frac{\rho_H^e}{\rho} + \frac{\rho_{\text{He}}^e}{\rho} + \frac{\rho_Z^e}{\rho} \right] \\
 &= \frac{m_H n_H}{\rho} + \frac{2 \frac{m_H}{m_{\text{He}}} m_{\text{He}} n_{\text{He}}}{\rho} + \frac{\frac{A}{2} \frac{m_H}{m_Z} m_Z n_Z}{\rho} = \frac{\rho_H}{\rho} + \frac{2}{4} \frac{\rho_{\text{He}}}{\rho} + \frac{A}{2A} \frac{\rho_Z}{\rho} \\
 &\equiv X + \frac{1}{2} Y + \frac{1}{2} Z. \tag{491}
 \end{aligned}$$

Also, conservation of mass imposes that

$$X + Y + Z = 1 \quad \Rightarrow \quad Z = 1 - X - Y \quad (492)$$

so

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{\mu}_e} &= X + \frac{1}{2}Y + \frac{1}{2}(1 - X - Y) = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2} = \frac{1+X}{2} \\ \Rightarrow \quad \frac{1}{\bar{\mu}_e} &= \frac{1+X}{2} \quad \Rightarrow \quad \bar{\mu}_e = \frac{2}{1+X}. \end{aligned} \quad (493)$$

The stars that are undergoing extreme relativistic degeneracy of matter are highly evolved (near the end of their life-cycle), which means that it is reasonable to assume that most of their hydrogen fuel has been burned up, so

$$X \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{\mu}_e \approx 2. \quad (494)$$

Finally, we combine this result with the eq. (490) to obtain the *Chandrasekhar mass limit*:

$$M_{\text{Ch}} = \frac{5.81}{\bar{\mu}_e^2} M_{\odot} = \frac{5.81}{2^2} M_{\odot} \quad \Rightarrow \quad M_{\text{Ch}} = 1.45 M_{\odot}. \quad (495)$$

When a star runs out of fuel, it will explode into a supernova or a helium flash (see Fig. 16). The Schwarzschild mass limit implies that star remnants with mass $M > M_{\text{Ch}}$ cannot be supported by electron degeneracy and therefore will collapse further into a neutron star or a black hole.

Bibliografia

[Krane, 2000] Kenneth S. Krane, *Introductory Nuclear Physics*